Untersuchungen über das Amiotsche Theorem bei den Flächen zweiter Ordnung und über Erzeugungsarten des elliptischen Kegels.

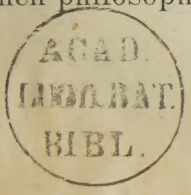
Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock



vorgelegt

von

GUSTAV BLENCK

Kandidat des höhern Lehramts aus **Kothendorf** in Meckl.-Schw.

Rostock.

Druck der Carl Boldt'schen Hofbuchdruckerei.

1911.

Referent: Professor Dr. Staude.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit zugeeignet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551520_0052

Verzeichnis der benutzten Werke.

B. Amiot, Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre. [Journal de mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville, Tome VIII, année 1843.]

Mac Cullagh, On the surfaces of the second order. [The collected works of James Mac Cullagh.]

R. Townsend, On a principle in the theory of surfaces of the second order, and its application to M. Jacobi's method of generating the ellipsoid. [The Cambridge and Dublin mathematical journal, Vol. III.]

M. Châsles, Mémoire de géometrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré. [Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré, Tome V.]

O. Staude, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung*).

O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene.

Salmon, Analytische Geometrie des Raumes I, 4. Aufl.

R. Baltzer, Analytische Geometrie.

O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes.

*) Im Text abgekürzt als Staude, Analytische Geometrie bezeichnet.

Während das Amiotsche Theorem der Flächen zweiter Ordnung, welches aussagt, daß eine Fläche zweiter Ordnung der geometrische Ort aller der Punkte ist, für die das Quadrat der Entfernung von einem festen Punkt zu dem Produkt ihrer Abstände von zwei Ebenen konstantes Verhältnis hat, bisher nur für den Fall untersucht worden ist, daß die Abstände von den festen Ebenen absolut genommen werden, soll die folgende Untersuchung klarlegen, wie sich das Theorem dann gestaltet, wenn man die Abstände als relative Längen betrachtet; dabei soll gleichzeitig die Lage dieser festen Ebenen zu den einzelnen Flächen untersucht werden. Für den Kegel im speziellen sollen außerdem Erzeugungsarten, die der Amiotschen verwandt sind, Erwähnung finden.

I. Abstandsprodukte.

§ 1. Das Produkt der relativen Abstände eines Punktes von zwei festen Ebenen.

Es seien zwei feste Ebenen E_1 und E_2 gegeben, orientiert man dann das Koordinatensystem so, daß die z-Achse parallel zu der Schnittlinie von E_1 und E_2, die durch den Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1

gehen möge, wird, und daß die y z-Ebene gleiche Winkel mit E_1 und E_2 bildet, — vergl. Fig. 1 — so kann man die Gleichungen der Ebenen in der Form:

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0 \quad (E_1) \qquad 1)$$

$$\text{und } \alpha(x - x_1) - \beta(y - y_1) = 0 \quad (E_2) \qquad 2)$$

annehmen, wo α und β zwei Konstante sind, die von der Lage der Ebenen abhängen. Anstatt der Gleichungen 1) und 2) ergibt sich als gemeinsame Gleichung für E_1 und E_2:

$$\alpha^2(x - x_1)^2 - \beta^2(y - y_1)^2 = 0. \qquad 3)$$

Ist nun eine beliebige nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Ebene gegeben, so fassen wir diese als gerichtete Ebene auf, indem wir die eine Seite derselben als positiv und die andere als negativ bezeichnen, und zwar soll — vergl. Baltzer, Analytische Geometrie S. 372 — als ihre positive Seite immer die vom Koordinatenanfangspunkt abgewendete Seite gelten. Soll nun ferner der relative Abstand eines Punktes von dieser gerichteten Ebene bestimmt werden, so soll — vergl. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes S. 18 — dieser Abstand positiv oder negativ sein, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite der Ebene liegt; und zwar ist dieser relative Abstand r des Punktes $P = x, y, z$ von der in bezug auf O gerichteten Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

$$r = \frac{Ax + By + Cz + D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad 4)$$

wo $\varepsilon = -\text{sign } D$ ist, und $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ die positive Wurzel aus $A^2 + B^2 + C^2$ bedeutet, wie in der analytischen Geometrie des Raumes abgeleitet wird.

Nach 4) ist also der relative Abstand r_1 eines Punktes $P = x, y, z$ von der Ebene E_1:

$$r_1 = \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

wo $\varepsilon_1 = \text{sign } (\alpha x_1 + \beta y_1)$ ist, und für den relativen Abstand r_2 desselben Punktes P von der Ebene E_2 gilt:

$$r_2 = \frac{\alpha(x - x_1) - \beta(y - y_1)}{\varepsilon_2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

wo $\varepsilon_2 = \text{sign } (\alpha x_1 - \beta y_1)$ ist.

Das Produkt der senkrechten Abstände des Punktes P von den beiden durch 3) gegebenen Ebenen ist also:

$$r_1 r_2 = \frac{\alpha^2 (x - x_1)^2 - \beta^2 (y - y_1)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\alpha^2 + \beta^2)}. \qquad 5)$$

Setzt man nun $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon = \text{sign } (\alpha x_1 + \beta y_1) \cdot \text{sign } (\alpha x_1 - \beta y_1) = \text{sign } (\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 y_1^2)$, so geht 5) über in:

$$r_1 r_2 = \frac{\alpha^2 (x - x_1)^2 - \beta^2 \cdot (y - y_1)^2}{\varepsilon (\alpha^2 + \beta^2)}, \qquad 6)$$

wo $\varepsilon = \text{sign } (\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 y_1^2)$ ist.

Die analoge Betrachtung gilt, wenn man das Koordinatensystem so legt, daß die y-Achse parallel zur Schnittlinie der beiden gegebenen festen Ebenen verläuft, und die yz-Ebene gleiche Winkel mit E_1 und E_2 bildet; die Gleichungen der Ebenen können dann in der Form:

$$\begin{cases} \alpha(x - x_1) + \gamma(z - z_1) = 0 & (E_1) \\ \alpha(x - x_1) - \gamma(z - z_1) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

oder in der gemeinsamen Gestalt:

$$\alpha^2(x - x_1)^2 - \gamma^2(z - z_1)^2 = 0 \qquad 7)$$

angenommen werden.

Ferner ist das Abstandsprodukt eines beliebigen Punktes $P = x, y, z$ von dem durch 7) gegebenen Ebenenpaare:

$$r_1 r_2 = \frac{\alpha^2(x - x_1)^2 - \gamma^2(z - z_1)^2}{\varepsilon(\alpha^2 + \gamma^2)},$$

wo $\varepsilon = \text{sign}(\alpha^2 x_1^2 - \gamma^2 z_1^2)$ ist.

§ 2. Deutung eines vorliegenden Ausdrucks als Produkt relativer Abstände.

Liegt ein Ausdruck von der Form:

$$N^2 = l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = 0, \text{ oder} \qquad 9)$$

$$M^2 = l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2 = 0 \qquad 9')$$

vor, so ergibt sich aus 6):

Der Ausdruck 9) ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der relativen Abstände r_1 und r_2 des Punktes $P = x, y, z$ von den sich in der Geraden $x = x_1,\ y = y_1$ schneidenden Ebenen:

$$l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = 0,$$

und zwar wird dieser konstante Faktor:

$$\varepsilon(l^2 + m^2),$$

wo $\varepsilon = \text{sign}(l^2 x_1^2 - m^2 y_1^2)$ ist; d. h. also, es wird: 10)

$$l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = \varepsilon(l^2 + m^2) r_1 r_2, \qquad 11)$$

wo ε durch 10) bestimmt ist.

Und aus 8) folgt analog:

Der Ausdruck 9′) ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der relativen Abstände r_1 und r_2 des Punktes $P = x, y, z$ von dem sich in der Geraden:

$$x = x_1,\ z = z_1$$

schneidenden Ebenenpaare:

$$l^2 (x - x_1)^2 - n^2 (z - z_1)^2 = 0,$$

und zwar wird dieser konstante Faktor:

$$\varepsilon (l^2 + n^2),$$

wo $\varepsilon = \text{sign}\,(l^2 x_1^2 - n^2 z_1^2)$ ist; d. h. also, es wird: 10′)

$$l^2 (x - x_1)^2 - n^2 (z - z_1)^2 = \varepsilon (l^2 + n^2)\, r_1 r_2, \qquad 11')$$

wo ε durch 10′) bestimmt ist.

II. Die Mittelpunktsflächen.

§ 3. Ableitung der Amiotschen Identität für die Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung.

Die beiden Flächen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a^2 > b^2 > c^2) \text{ und} \qquad 1)$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad (a'^2 > b'^2 > c'^2) \qquad 2)$$

mögen konfokal sein und konfokal liegen; dann wird also:

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2, \qquad 3)$$

wo h^2 den gemeinsamen Wert der drei Differenzen bezeichnet.

Es seien nun $P = x,\ y,\ z$ und $P_0 = x_0,\ y_0,\ z_0$ zwei beliebige Raumpunkte, so gilt, wie sich durch einfache Umordnung der Klammerausdrücke unter Berücksichtigung des Umstandes, daß h^2 einen der Werte 3) annehmen kann, sofort ergibt:

$$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$

$$=(a^2-a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{a'^2}\right)+(b^2-b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y_0^2}{b'^2}\right) \qquad 4)$$

$$+(c^2-c'^2)\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{z_0^2}{c'^2}\right).$$

Nun ist:

$$(a^2-a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{a'^2}\right)=(x-x_0)^2-\left(\frac{a'}{a}x-\frac{a}{a'}x_0\right)^2,$$

und entsprechende Umformungsformeln gelten für y, y_0 und z, z_0.

Auf Grund dieser Formeln geht 4) über in:

$$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$

$$=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\} \qquad 5)$$

$$-\left\{\left(\frac{a'}{a}x-\frac{a}{a'}x_0\right)^2+\left(\frac{b'}{b}y-\frac{b}{b'}y_0\right)^2+\left(\frac{c'}{c}z-\frac{c}{c'}z_0\right)^2\right\}.$$

Die Gleichung 5) gilt identisch in x, y, z und x_0, y_0, z_0 für den Fall, daß die Flächen 1) und 2) konfokal sind und h^2 den gemeinsamen Wert der Differenzen 3) bezeichnet.

Um nun die Identität des Amiotschen Satzes zu erhalten, ordnet man dem Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ einen Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1$ durch folgende Beziehungen zu:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{x_0}{a'^2}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y_0}{b'^2}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z_0}{c'^2}. \tag{6}$$

Man bezeichnet P_1 als den dem Punkte P_0 entsprechenden Punkt. Durch 6) geht dann die Identität 5) über in:

$$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}-1\right)\right\}$$
$$=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\} \tag{7}$$
$$-\left\{\frac{a'^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}.$$

Man spezialisiert jetzt weiter, indem man annimmt, daß P_0 auf dem Hauptschnitt der zweiten Fläche und zwar entweder in der xy- oder in der xz-Ebene liege, so daß seine Koordination also entweder der Bedingung:

$$\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{y_0^2}{b'^2}=1,\ z_0=0 \text{ oder der Gleichung} \tag{8}$$

$$\frac{x_0^2}{a'^2}+\frac{z_0^2}{c'^2}+1,\ y_0=0 \tag{8'}$$

genügen.

Infolge von 6) und 8) oder 8') wird also die Identität 7):

$$h^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right\}=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{a'^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}z^2\right\}, \tag{9}$$

oder:

$$h^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right\}=\left\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\right\} \qquad 9')$$
$$-\left\{\frac{a'^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}y^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}.$$

Sind also $P_0 = x_0,\ y_0,\ 0$ oder $P_0 = x_0,\ 0,\ z_0$ Punkte der Hauptschnitte $z = 0$ oder $y = 0$ der Fläche 2), und sind nach 6) die Koordinaten der entsprechenden Punkte P_1:

$$x_1 = \frac{a^2}{a'^2}x_0,\ y_1 = \frac{b^2}{b'^2}y_0,\ z_1 = 0 \qquad 10)$$

oder:

$$x_1 = \frac{a^2}{a'^2}x_0,\ y_1 = 0,\ z_1 = \frac{c^2}{c'^2}z_0, \qquad 10')$$

so gelten die Gleichungen 9) und 9') identisch in x, y, z.

Eine letzte Spezialisierung liefert dann schließlich die für alle Mittelpunktsflächen gemeinsame Form der Amiotschen Identität: Setzt man nämlich

$$c'^2 = 0 \text{ oder } b'^2 = 0,$$

so folgt nach 3):

$$h^2 = c^2,\ a'^2 = a^2 - c^2,\ b'^2 = b^2 - c^2,$$

oder:

$$h^2 = b^2,\ a'^2 = a^2 - b^2,\ c'^2 = c^2 - b^2.$$

Die Gleichungen der Hauptschnitte 8) und 8'), denen P_0 genügen sollte, gehen über in:

$$\frac{x_0^2}{a^2-c^2}+\frac{y_0^2}{b^2-c^2}=1,\ z_0 = 0$$

und:

$$\frac{x_0^2}{a^2-b^2}-\frac{z_0^2}{b^2-c^2}=1,\ y_0 = 0;$$

d. h. die obigen Hauptschnitte der Fläche 2) werden Fokalellipse oder Fokalhyperbel der Fläche 1).

Um nun 1) auf die allen Mittelpunktsflächen gemeinsame Gleichungsform zu bringen, muß man:

$$b^2 = a^2 - d^2,\ c^2 = a^2 - e^2$$

setzen, dann wird auch:

$$h^2 = a^2 - e^2,\ a'^2 = e^2,\ b'^2 = e^2 - d^2$$

oder:

$$h^2 = a^2 - d^2,\ a'^2 = d^2,\ c'^2 = d^2 - e^2.$$

Es ergibt sich daher jetzt der Satz:

Ist $P_0 = x_0,\ y_0,\ 0$ oder $P_0 = x_0,\ 0,\ z_0$ ein Punkt l. der Fokalellipse:

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1,\ z = 0,$$

bezw. der Fokalhyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 1,\ y = 0$$

der Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt durch die Formeln:

$$x_1 = \frac{a^2}{e^2} x_0,\ y_1 = \frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2} y_0,\ z_1 = 0 \qquad 11)$$

oder:

$$x_1 = \frac{a^2}{d^2} x_0,\ y_1 = 0,\ z_1 = \frac{a^2 - e^2}{d^2 - e^2} z_0 \qquad 11')$$

zugeordnet, so gelten folgende Identitäten in x, y, z:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2\right\} - \left\{\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y - y_1)^2\right\} \quad 12)$$

oder:

$$(a^2 - d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \left\{(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2\right\} - \left\{\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2\right\}. \quad 12')$$

Welches ist nun die Bedeutung dieser Identitäten? Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der Identitäten 12) oder 12′) bedeutet die Entfernung des Raumpunktes $P = x, y, z$ von einem beliebigen Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der Fokalellipse oder $P_0 = x_0, 0, z_0$ der Fokalhyperbel; hat nun der zweite Klammerausdruck die Form:

$$l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2$$

oder:

$$l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2,$$

so ist er nach § 2, 11) oder 11′), abgesehen von einem konstanten Faktor und einem Vorzeichen, das Produkt der relativen Abstände des Punktes P von zwei festen Ebenen; liegt nun ferner der Punkt P auf der Mittelpunktsfläche 1), so verschwindet die linke Seite der Identitäten 12) und 12′), und es ergibt sich somit aus diesen Gleichungen die Amiotsche Eigenschaft der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung: daß nämlich die Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung der geometrische Ort des Punktes ist, für den das Verhältnis des Quadrates seiner Entfernung von einem beliebigen Punkte der

Fokalkegelschnitte zu dem Abstandsprodukte von dem zugehörigen festen Ebenenpaare bis auf ein Vorzeichen konstant ist. Hat der zweite Klammerausdruck auf der rechten Seite der Identitäten 12) und 12') dagegen die Form:

$$l^2(x - x_1)^2 + m^2(y - y_1)^2$$

oder:

$$l^2(x - x_1)^2 + n^2(z - z_1)^2,$$

so bedeutet er, entweder — nach den Betrachtungen in § 1 — bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der Abstände des Punktes P von zwei festen imaginären Ebenen, oder — nach Staude, Analytische Geometrie II, § 126, 7) und 12) — das Quadrat des schrägen Abstandes des Punktes P von einer festen Geraden; in diesem Fall ergibt sich aus den Identitäten, wenn wir von der praktisch bedeutungslosen imaginären Amiotschen Erzeugungsweise absehen, die MacCullaghsche Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung: daß nämlich die Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung der geometrische Ort des Punktes ist, für den das Verhältnis des Abstandes von einem beliebigen Punkte des betreffenden Fokalkegelschnittes und des schrägen, parallel einer bestimmten Ebene gemessenen, Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant ist.

Welche von den beiden Erzeugungsarten anwendbar ist, hängt von dem Vorzeichen der Koeffizienten in den zweiten Klammerausdrücken der rechten Seiten von 12) und 12') und damit von der Größenbeziehung zwischen a^2, e^2 und d^2 ab, und ist daher für die einzelnen Mittelpunktsflächen verschieden; wir sehen

aber von einer ausführlicheren Erörterung der Mac Cullaghschen Erzeugungsweise der Flächen zweiter Ordnung ab und beschränken uns in den folgenden Ausführungen im wesentlichen darauf, durch Spezialisierung der Identitäten 12) und 12′) für die einzelnen Mittelpunktsflächen das Amiotsche Theorem für relative Abstandsprodukte zu behandeln und die Lagebeziehung zwischen den Ebenenpaaren, von denen die Abstände gemessen werden, und den Flächen festzustellen.

§ 4. Das dreiachsige Ellipsoid.

Unter der Voraussetzung, daß

$$a^2 > e^2 > d^2$$

ist, geht die Identität 12′) über in:

$$\begin{aligned}(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}\\ =\left\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\right\}\\ -\left\{\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}(z-z_1)^2\right\}.\end{aligned}\qquad 13)$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der Identität 13) ist r^2, wenn unter r die Entfernung des Punktes $P = x, y, z$ von dem Punkte $P_0 = x_0, 0, z_0$ der Fokalhyperbel verstanden wird. Der zweite Klammerausdruck hat die Form:

$$l^2(x-x_1)^2-n^2(z-z_1)^2,$$

d. h. es wird nach § 2, 11′):

$$\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}(z-z_1)^2=\varepsilon\left(\frac{d^2}{a^2}+\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}\right)r_1\,r_2$$

$$=\varepsilon\,\frac{e^2\,(a^2-d^2)}{a^2\,(a^2-e^2)}\,r_1\,r_2,$$

wo r_1 und r_2 die relativen Abstände des Punktes x, y, z von dem Ebenenpaare:

$$\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}(z-z_1)^2=0$$

sind, und wo nach § 2, 10′)

$$\varepsilon=\operatorname{sign}\left(\frac{d^2}{a^2}x_1^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}z_1^2\right)$$

ist.

Die Identität 13) erhält also die Gestalt:

$$(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}$$

$$=r^2-\varepsilon\,\frac{e^2\,(a^2-d^2)}{a^2\,(a^2-e^2)}\,r_1\,r_2. \qquad 14)$$

Das Ebenenpaar:

$$(E_{1,2})\,\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}(z-z_1)^2=0$$

ist den Ebenen:

$$\frac{d^2}{a^2}x^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}z^2=0,$$

d. h. den Hauptkreisschnittebenen parallel; die Schnittlinie von E_1 und E_2 steht immer auf der xz-Ebene senkrecht und geht durch den Punkt $P_1=x_1,\ 0,\ z_1$, der durch die Beziehungen § 3, 11′) von dem Punkte P_0 der Fokalhyperbel abhängt; diese Schnittlinie bezeichnet man als die dem Punkte P_0 zugeordnete Direktrix.

Nimmt man jetzt an, daß der bisher beliebige Raumpunkt P = x, y, z auf dem durch die Klammer der linken Seite der Identität 14) dargestellten Ellipsoid liege, so liefert 14) folgenden Satz:

I. Für jeden Punkt eines Ellipsoids ist der absolute Wert des Verhältnisses des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der Fokalhyperbel zu dem Produkte der relativ genommenen senkrechten Abstände von den beiden durch die dem Punkte der Fokalhyperbel zugeordnete Direktrix gehenden Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{e^2(a^2-d^2)}{a^2(a^2-e^2)}$.

Welchen Wert hat nun das in der Identität 14) auftretende Vorzeichen ε? Ist es konstant für alle Punkte des Ellipsoids und für alle Lagen des Ebenenpaares $E_{1,2}$ oder nicht? Es ist

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\left(\frac{d^2}{a^2}x_1^2 - \frac{e^2-d^2}{a^2-e^2}z_1^2\right), \qquad 15)$$

d. h. es ist unabhängig von den Punkten x, y, z des Ellipsoids. Hieraus folgt, daß das Ellipsoid immer in demselben Winkelraum des Ebenenpaares liegt, so daß also die Ebenen die Fläche niemals schneiden können; denn nimmt man an, eine der Ebenen schnitte die Fläche, so würde z. B. für einen Punkt P_1 der Fläche — vgl. Fig. 2 — das Produkt der relativen Abstände $r_1 r_2$ negativ — r_1 ist nämlich nach unseren im Anfang getroffenen Festsetzungen positiv, und r_2 ist negativ —, für einen Punkt P_2 dagegen wird $r_1 r_2$ positiv; damit nun, wie die Identität 14) es erfordert,

$r^2 - \varepsilon \frac{e^2 (a^2 - d^2)}{a^2 (a^2 - e^2)} r_1 r_2 = 0$ wird, müßte ε für P_1 negativ' für P_2 positiv sein, das ist aber nach 15) unmöglich, da ε unabhängig von x, y, z ist; folglich schneiden die Ebenen $E_{1,2}$ die Fläche nicht.

Es gilt übrigens, wie sich aus folgender Überlegung ergibt, und wie weiter unten für die einzelnen Flächen rein analytisch bewiesen wird, ganz allgemein der Satz:

II. Das feste Ebenenpaar, von dem die senkrechten Abstände bei der Amiotschen Erzeugungsart der Flächen zweiter Ordnung gemessen werden, kann die erzeugte Fläche niemals schneiden, sondern sie höchstens in den Kreispunkten berühren. Hätte nämlich eine der Ebenen, E_1 etwa, einen Kegelschnitt g mit der Fläche gemeinsam, so wäre für alle Punkte von g $r_1 = 0$, da nun nach Amiot:

$$r^2 - \varepsilon c r_1 r_2 = 0$$

für die Flächenpunkte ist, so müßte auch $r = 0$ sein, d. h. g müßte mit einem der Fokalkegelschnitte der Fläche zusammenfallen; nun liegt aber ein Fokalkegelschnitt niemals auf der Fläche, zu der er gehört, sondern er hat nur die Kreispunkte mit ihr gemeinsam; also sind diese Punkte die einzigen, für die $r = 0$ wird.

Anderseits können wir nun den weiteren allgemeinen Satz aussprechen, der ebenfalls unten für die einzelnen Flächen analytisch bewiesen wird:

III. Legt man durch die zu einem der Kreispunkte gehörige Direktrix die beiden Kreisschnittebenen, so muß eine von ihnen die Fläche im Kreispunkte berühren.

Für den Kreispunkt wird nämlich $r = 0$, d. h. aus der Gleichung

$$r^2 - \varepsilon c r_1 r_2 = 0$$

folgt: r_1 oder $r_2 = 0$; d. h. E_1 oder E_2 geht durch den Kreispunkt.

Ist ε nun auch unabhängig von der Wahl des Punktes $P_1 = x_1, 0, z_1$? Es war $\varepsilon = \text{sign}\left(\frac{d^2}{a^2} x_1^2 - \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2} z_1^2\right)$; um dieses Vorzeichen zu untersuchen, muß man den Zusammenhang zwischen x_1 und z_1 berücksichtigen:

Der Punkt P_1 ist dem Punkte P_0 der Fokalhyperbel durch die Formeln 11′) zugeordnet; durchläuft nun P_0 die Fokalhyperbel, so beschreiben die zugehörigen Direktrizen einen Zylinder, dessen Gleichung erhalten wird, wenn man in die Gleichung der Fokalhyperbel:

$$\frac{x_0^2}{d^2} - \frac{z_0^2}{e^2 - d^2} = 1,\ y_0 = 0$$

für x_0, z_0 die aus 11′) zu berechnenden Werte von x_1, z_1 einsetzt. Es ergibt sich dann:

$$\frac{d^2}{a^4} x_1^2 - \frac{e^2 - d^2}{(a^2 - e^2)^2} z_1^2 = 1;$$

d. h. der Ort der Direktrizen ist ein hyperbolischer Zylinder. Auf Grund der letzten Gleichung wird:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \text{sign}\left[\left(1 - \frac{d^2}{a^4} x_1^2\right)\left(a^2 - e^2\right) + \frac{d^2}{a^2} x_1^2\right] \\ &= \text{sign}\left[a^6 - e^2 a^4 + e^2 d^2 x_1^2\right] \\ &= \text{sign}\left[a^4 (a^2 - e^2) + e^2 d^2 x_1^2\right],\end{aligned}$$

da nun $a^2 > e^2$ ist, so sind die rechtsstehenden Summanden positiv, es wird also:

$$\varepsilon = +1.$$

Die Identität 14) vereinfacht sich daher in:

$$\left(a^2 - d^2\right)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = r^2 - \frac{e^2 a^2 - d^2}{a^2 a^2 - e^2} r_1 r_2,$$

und der unter I ausgesprochene Satz lautet jetzt:

IV. Für jeden Punkt eines Ellipsoids ist das Verhältnis des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der Fokalhyperbel zu dem Produkte der relativ genommenen senkrechten Abstände von den beiden durch die dem Punkte zugeordnete Direktrix gehenden Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)}$.

Es behält also für den Fall des Ellipsoids das Amiotsche Theorem auch für relative Abstände seine Gültigkeit.

Welche Lage haben nun die durch die verschiedenen Direktrizen gehenden Ebenen $E_{1,2}$ zur Fläche?

Daß E_1 und E_2 das Ellipsoid nie schneiden, folgte schon aus dem allgemeinen Satze II, es läßt sich aber auch direkt rein analytisch wie folgt nachweisen:

Nach Staude, Analytische Geometrie § 106 und folgende kann man das Schnittresultat einer gegebenen Ebene mit einer Fläche zweiter Ordnung in folgender Weise bestimmen:

Hat die Ebene die Gleichung

$$ux + vy + wz + s = 0,$$

und ist die Fläche gegeben durch:

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

so ist, wenn man unter A^u die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix},$$

unter $A_{kl}{}^u$ die Unterdeterminante des Elementes a_{kl} und unter $A_{11}{}'^u$ die Summe der Diagonalunterdeterminanten zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} & w \\ v & w & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} & w \\ a_{13} & a_{11} & u \\ w & u & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u \\ a_{21} & a_{22} & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}$$

versteht, die Bedingung dafür, daß die Ebene die Fläche in einer Ellipse schneidet:

$$-A_{44}{}^u > 0, \text{ — vgl. § 114, 5. Tab. (20) —,}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß A^u nicht gleich 0 sei; und zwar ist diese Ellipse imaginär oder reell, je nachdem $A^u A_{44}{}'^u > 0$ oder < 0 ist. — $A^u = 0$ ist nach Staude, Analytische Geometrie § 107, 3 die Bedingung dafür, daß die Ebene

$$ux + vy + wz + s = 0$$

eine Tangentialebene der Fläche $g(x, y, z) = 0$ ist.

Wendet man diese Kriterien auf den Fall an, daß die Fläche ein Ellipsoid mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

ist, so haben die oben erwähnten Ausdrücke nach Staude, § 115 (2), (4), (7), und (8) folgende Werte:

$$A^u=\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-s^2}{a^2b^2c^2},\quad A^u_{44}=-\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}{a^2b^2c^2},$$

$$A'^u_{44}=-\frac{b^2v^2+c^2w^2}{b^2c^2}-\frac{c^2w^2+a^2u^2}{a^2c^2}-\frac{a^2u^2+b^2v^2}{a^2b^2}, \text{ oder}$$

$$=A^u_{44}(a^2+b^2+c^2)+\frac{a^4u^2+b^4v^2+c^4w^2}{a^2b^2c^2}.$$

Gibt man das Ellipsoid, wie wir es getan haben, durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1=0,\quad a^2>e^2>d^2,$$

so gehen die Ausdrücke über in:

$$A^u=\frac{a^2u^2+(a^2-d^2)v^2+(a^2-e^2)w^2-s^2}{a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)},$$

$$A^u_{44}=-\frac{a^2u^2+(a^2-d^2)v^2+(a^2-e^2)w^2}{a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)}$$

$$A'^u_{44}=-\frac{(a^2-d^2)v^2+(a^2-e^2)w^2}{(a^2-d^2)(a^2-e^2)}$$

$$-\frac{(a^2-e^2)w^2+a^2u^2}{a^2(a^2-e^2)}-\frac{a^2u^2+(a^2-d^2)v^2}{a^2(a^2-d^2)},$$

$$\text{oder}=A^u_{44}(a^2+a^2-d^2+a^2-e^2)$$

$$+\frac{a^4u^2+(a^2-d^2)^2v^2+(a^2-e^2)^2w^2}{a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)}.$$

Nun ist für das Ellipsoid $-A^u_{44}>0$ als Summe von nur positiven Gliedern, und aus demselben Grunde ist auch

$-A'^{u}_{44} > 0$. Es ist also sign $A^u A'^{u}_{44} = -$ sign A^u $= -$ sign $[a^2u^2 + (a^2 - d^2)v^2 + (a^2 - e^2)w^2 - s^2]$. Es folgt daher, daß das Ellipsoid von der Ebene u, v, w, s in einer imaginären oder reellen Ellipse geschnitten wird, je nachdem

$a^2u^2 + (a^2 - d^2)v^2 + (a^2 - e^2)w^2 - s^2 < 0$ oder > 0 ist.

Ist $A^u = 0$, so erhalten wir nach Staude, Analytische Geometrie § 114, Tab. (20) als Schnittresultat ein imaginäres Linienpaar.

Um nun das obige Vorzeichen zu untersuchen, müssen wir beachten, daß $E_{1,2}$ die Gleichung:

$$\frac{d}{a}(x - x_1) \pm \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}}(z - z_1) = 0$$

hat, oder wenn man statt x_1, z_1: x_0, z_0 einführt:

$$\frac{d}{a}\left(x - \frac{a^2}{d^2}x_0\right) \pm \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}}\left(z - \frac{a^2 - e^2}{d^2 - e^2}z_0\right) = 0.$$

Unser Kriterium erhält daher folgende Gestalt:

$$d^2 \pm (e^2 - d^2) - \left(\frac{a}{d}x_0 \mp \sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}}z_0\right)^2$$

$$= e^2 - \frac{a^2}{d^2}x_0^2 \mp 2\frac{a}{d}\sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}}x_0 z_0 - \frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}z_0^2.$$

Führt man nun für $\frac{z_0^2}{e^2 - d^2}$ aus der Gleichung der Fokalhyperbel $\frac{x_0^2 - d^2}{d^2}$ ein, so geht der Ausdruck über in:

$$\frac{d^2e^2}{d^2} - \frac{a^2x_0^2}{d^2} \pm 2\frac{a\,x_0}{d^2}\sqrt{(a^2-e^2)(x_0^2-d^2)} - \frac{(a^2-e^2)(x_0^2-d^2)}{d^2},$$

oder nach Umformung und Fortlassung des gemeinsamen positiven Nenners:

$$-x_0^2(a^2-e^2) - a^2(x_0^2-d^2) \pm 2x_0 a\sqrt{(a^2-e^2)(x_0^2-d^2)} = -\left[x_0\sqrt{a^2-e^2} \mp a\sqrt{x_0^2-d^2}\right]^2 < 0;$$

d. h. $E_{1,2}$ schneidet das Ellipsoid immer in einer imaginären Ellipse.

Diese imaginäre Ellipse ist nun im besondern ein imaginärer Kreis, wie schon daraus hervorgeht, daß $E_{1,2}$ parallel zu den Hauptkreisschnittebenen sind; daß das Schnittresultat zwischen $E_{1,2}$ und dem Ellipsoid ein imaginärer Kreis ist, soll im folgenden auch analytisch nachgewiesen werden: Nach Staude, Analytische Geometrie § 114, Tab. (20) erhält der Kegelschnitt die Normalform:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0,$$

wo nach § 114, (8):

$$\alpha = \frac{A^u}{A^u_{44}\lambda_1}, \quad \beta = \frac{A^u}{A^u_{44}\lambda_2}$$

ist, und λ_1, λ_2 nach § 109, (11) die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$H(\lambda) = -e^2\lambda^2 - A'^{u}_{44}\,\lambda + A^{u}_{44} = 0$$

sind, wenn

$$e^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

gesetzt ist.

Diese quadratische Gleichung hat nun zwei gleiche Wurzeln, wenn ihre Diskriminante:

$$(A'^{u}_{44})^2 + 4\,e^2\,A^{u}_{44}$$

verschwindet; letzteres trifft für die Ebenen $E_{1,2}$ zu; denn nach Staude, § 115, (7) wird für:

$$u = \frac{d}{a},\ v = 0,\ w = \pm\sqrt{\frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}}:$$

$$A'^{u}_{44} = -\frac{e^2 - d^2}{(a^2 - e^2)(a^2 - d^2)} - \frac{e^2}{a^2(a^2 - e^2)} - \frac{d^2}{a^2(a^2 - d^2)} = -\frac{2e^2}{a^2(a^2 - e^2)};$$

$$(A'^{u}_{44})^2 + 4e^2\,A^{u}_{44} = \frac{4e^4}{a^4(a^2 - e^2)^2} - 4\left(\frac{d^2}{a^2} + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}\right)\frac{e^2}{a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)} = \frac{4e^4 - 4e^4}{a^4(a^2 - e^2)^2} = 0.$$

Es ist also $\lambda_1 = \lambda_2$ und somit auch

$$\alpha = \beta;$$

d. h. $E_{1,2}$ schneidet das Ellipsoid in einem imaginären Kreis, und wir können $E_{1,2}$ deshalb auch als Kreisschnittebenen bezeichnen.

Es ist bisher vorausgesetzt worden, daß A^u nicht verschwindet; ist

$$A^u = 0,$$

so ist E_1 oder E_2 eine Tangentialebene des Ellipsoids, und zwar berühren diese Tangentialebenen das Ellipsoid bezw. in den verschiedenen Kreispunkten:

$$x = \pm \frac{ad}{e}, y = 0 \; z = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - e^2)(e^2 - d^2)}}{e},$$

wie weiter unten noch genauer erörtert wird, und wie sich auch aus der Ausrechnung des Ausdrucks $A^u = 0$ ergibt; es verschwindet nämlich

$$A^u = \frac{e^2 - s^2}{a^2 (a^2 - d^2)(a^2 - e^2)}$$

für $s = \pm e$, wobei

$$s = -\frac{a}{d} x_0 + \sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}} z_0$$

ist; hieraus ergeben sich für x_0, z_0 die Kreispunkte; d. h. $E_{1,2}$ sind die den Kreispunkten zugeordneten Ebenen, folglich berühren sie nach Satz III des Ellipsoid in ihnen.

Um nun den Verlauf der Kreisschnittebenen im einzelnen festzustellen, betrachten wir die zu den verschiedenen Punkten der Fokalhyperbel F gehörigen Ebenenpaare.

1. Zu dem Scheitel der Fokalhyperbel:

$$x_0 = d, \; z_0 = 0$$

gehört auf Grund der Relation 11') der Punkt:

$$x_1 = \frac{a^2}{d}, \; z_1 = 0.$$

Das zugehörige, zur Amiotschen Erzeugungsweise dienende, Kreisschnittebenenpaar hat nun allgemein die Gleichung:

$$\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 - \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2 = 0, \qquad 16)$$

also in dem vorliegenden Falle:

$$\frac{d^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 - \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}z^2 = 0 \text{ — vergl. Fig. 3 —.}$$

Bewegt sich P_0 jetzt auf dem positiven rechten Hyperbelast vorwärts, so läuft P_1 auf dem negativen rechten Zweig der Hyperbel, in der die xz-Ebene den Direktrizenzylinder schneidet, da x_1 nach 11') dasselbe Vorzeichen wie x_0, z_1 aber auf Grund der Voraussetzung über das Größenverhältnis von a^2, e^2 und d^2 für das Ellipsoid das entgegengesetzte Vorzeichen wie z_0 hat. Von dem Ebenenpaar, das sich ja immer parallel mit sich verschiebt, nähert sich also E_1 der Fläche, während E_2 sich von ihr entfernt.

2. Betrachtet man jetzt den Schnittpunkt des rechten obern Fokalhyperbelbogens mit der Fläche, d. h. den Kreispunkt mit den Koordinaten:

$$x_0 = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\ y_0 = 0,\ z_0 = c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

für den Fall, daß das Ellipsoid die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat, oder für die uns vorliegende Form der Flächengleichung den Kreispunkt mit den Koordinaten:

$$x_0 = \frac{ad}{e}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{\sqrt{(a^2 - e^2)(e^2 - d^2)}}{e},$$

so hat die zugehörige Direktrix die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{a^3}{ed}, \quad z_1 = -\frac{a^2 - e^2}{e}\sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}}, \qquad 17)$$

und das Ebenenpaar E_1 und E_2 nach 16) und 17):

$$\frac{d}{a}\left(x - \frac{a^3}{ed}\right)$$

$$\pm\sqrt{\frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}}\left(z + \frac{a^2 - e^2}{e}\sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}}\right) = 0, \qquad 18)$$

wo das obere Zeichen für E_1, das untere für E_2 gelten möge. Nach den vorangestellten allgemeinen Bemerkungen muß nun eine der Ebenen 18) durch den Kreispunkt hindurchgehen, und die Koordinaten desselben genügen auch in der Tat der Gleichung für E_1; es ist nämlich:

$$\frac{d}{a}\left(\frac{ad}{e} - \frac{a^3}{ed}\right) + \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(a^2 - e^2)(e^2 - d^2)}}{e} + \frac{a^2 - e^2}{e}\sqrt{\frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2}}\right] = 0. \qquad 19)$$

Es hat sich also jetzt E_1 dem Ellipsoid bis zur Berührung genähert.

3. Bewegt sich nun P_0 in demselben Sinn wie bisher auf der Fokalhyperbel weiter, so kann sich E_1 dem Ellipsoid nicht mehr nähern, da sie sonst die

Fläche reell schneiden würde, was nach der oben durchgeführten analytischen Untersuchung unmöglich ist; konstruiert man nun zu einem Punkte —3— der Fokalhyperbel außerhalb des Ellipsoids das zugehörige Ebenenpaar, so sieht man, daß E_1 wieder zurückweicht — vergl. Fig. 3.

Der Verlauf der Kreisschnittebenen, die zur Amiotschen Erzeugung der Fläche dienen, für diejenigen Direktrizen, deren Fußpunkte auf dem obern rechten Zweig der Durchschnittshyperbel des Direktrizenzylinders und der xz-Ebene liegen — der Synfokale, wie Amiot diese Schnittkurve nennt — ergibt sich wegen der Symmetrieverhältnisse dadurch, daß man die soeben gefundenen Fokalpunkte und die zugehörigen Direktrizen an der xy-Ebene spiegelt und dann durch die Leitlinien wieder die beiden Systeme von parallelen Ebenen legt. Man findet dann z. B., daß von 1′ bis zu einer Direktrix 4′ sich die Ebene E_2 der Fläche nähert, daß E_2 durch die letztere Direktrix das Ellipsoid im Kreispunkte:

$$x_0 = \frac{ad}{e},\ y_0 = 0,\ z_0 = -\frac{\sqrt{(a^2 - e^2)(e^2 - d^2)}}{e} \qquad 20)$$

berührt, dann sich wieder entfernt usw.

Durch Spiegelung der ganzen Figur an der yz-Ebene und Vertauschung von E_1 und E_2 findet man die analogen Verhältnisse für den linken Zweig der Fokalhyperbel und die linke Schale des hyperbolischen Direktrizenzylinders.

§ 5. Das einschalige Hyperboloid.

Mit der Voraussetzung:

$$e^2 > a^2 > d^2 \qquad 21)$$

würde sich theoretisch aus den Identitäten 12) oder 12') die der Formel 13) entsprechende Identität des Amiotschen Theorems für das einschalige Hyperboloid ableiten lassen; indessen zeigt die Durchführung der Rechnung, daß in dem zweiten Klammerausdruck auf der rechten Seite in beiden Identitäten eine Summe von Quadraten und keine Differenz auftritt; also läßt sich das einschalige Hyperboloid nicht reell auf die Amiotsche sondern nur auf die Mac Cullaghsche Weise erzeugen.

§ 6. Das zweischalige Hyperboloid.

Mit der Voraussetzung:

$$e^2 > d^2 > a^2 \qquad 22)$$

geht die Identität 12) über in:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2 - a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1\right\}$$
$$= \left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2\right\} \qquad 23)$$
$$- \left\{\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}(y - y_1)^2\right\}.$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der Identität 23) ist r^2, wenn unter r die Entfernung des

Punktes $P = x, y, z$ von dem Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der Fokalellipse:

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1, \; z = 0 \qquad 24)$$

verstanden wird.

Nach § 2, 11) wird der zweite Klammerausdruck:

$$\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}(y - y_1)^2 = \varepsilon \left(\frac{e^2}{a^2} - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}\right) r_1 r_2$$

$$= \varepsilon \frac{d^2 e^2 - a^2}{a^2 d^2 - a^2} r_1 r_2,$$

wo r_1 und r_2 die relativen Abstände des Punktes x, y, z von dem Ebenenpaar:

$$(E_{1,2}) \quad \frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}(y - y_1)^2 = 0 \qquad 25)$$

sind, und

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\left[\frac{e^2}{a_2} x_1^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2} y_1^2\right]$$

ist.

Die Gleichung 23) wird also:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2 - a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1\right\} \qquad 26)$$

$$= r^2 - \varepsilon \frac{d^2 e^2 - a^2}{a^2 d^2 - a^2} r_1 r_2.$$

Das Ebenenpaar 25), welches durch die im Punkte $x_1, y_1, 0$ errichtete Direktrix geht, ist dem Hauptkreisschnittebenenpaar:

$$\frac{e^2}{a^2} x^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2} y^2 = 0$$

parallel.

Liegt jetzt der bisher beliebige Raumpunkt P = x, y, z auf dem zweischaligen Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2 - a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 1, \qquad 27)$$

so folgt aus dem Verschwinden der linken Seite der Identität 26) der Satz:

Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloids I. 27) ist der absolute Wert des Verhältnisses des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der Fokalellipse zu dem Produkt seiner relativen Abstände von den beiden durch die dem Punkte der Fokalellipse zugeordnete Direktrix gehenden Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{d^2}{a^2}\frac{e^2 - a^2}{d^2 - a^2}$.

Welches ist nun der Wert von ε?

Es ist

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\left[\frac{e^2}{a^2}x_1^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}y_1^2\right],$$

d. h., wie es nach den allgemeinen Überlegungen in § 4 auch sein muß, unabhängig von den Punkten P des zweischaligen Hyperboloids. Um nun ε in betreff seiner Abhängigkeit von x_1, y_1 zu untersuchen, ist folgendes zu beachten:

Die Punkte P_1 sind den Punkten P_0 der Fokalellipse durch die Formeln 11) zugeordnet; durchläuft nun P_0 die Fokalellipse, so beschreiben die zugehörigen Direktrizen einen Zylinder, dessen Gleichung erhalten wird, wenn man in die Gleichung der Fokalellipse:

$$\frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{e^2 - d^2} = 1$$

für x_0, y_0 die aus 11) zu berechnenden Werte von x_1, y_1 einsetzt. Es ergibt sich dann:

$$\frac{e^2}{a^4}x_1^2 + \frac{e^2 - d^2}{(a^2 - d^2)^2}y_1^2 = 1; \qquad 28)$$

d. h. der Ort der Direktrizen ist ein elliptischer Zylinder, der den Koordinatenanfangspunkt umgibt, aber die Fläche nicht schneidet; denn die x-Koordinate des rechten Scheitels der Synfokale ist nach 28): $\frac{a^2}{e}$, also kleiner als die entsprechende Scheitelkoordinate a der ersten Hauptschnittshyperbel der Fläche.

Auf Grund von 28) wird nun:

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\left[a^2e^2x_1^2 + (a^4 - e^2x_1^2)(a^2 - d^2)\right]$$
$$= \operatorname{sign}\left[e^2d^2x_1^2 - a^4(d^2 - a^2)\right].$$

Es kann sich also jetzt das Vorzeichen mit x_1, oder nach 11) mit x_0 ändern, und zwar wird:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & \varepsilon = +1, \text{ für } x_1^2 > \dfrac{a^4}{e^2d^2}(d^2 - a^2), \\
 & \quad \text{oder für } x_0^2 > \dfrac{e^2}{d^2}(d^2 - a^2), \\
\text{b)} & \varepsilon = -1, \text{ für } x_1^2 < \dfrac{a^4}{e^2d^2}(d^2 - a^2), \\
 & \quad \text{oder für } x_0^2 < \dfrac{e^2(d^2 - a^2)}{d^2}, \\
\text{c) } \varepsilon \text{ wird unbestimmt für } & x_1^2 = \dfrac{a^4}{e^2d^2}(d^2 - a^2), \\
 & \quad \text{oder für } x_0^2 = \dfrac{e^2(d^2 - a^2)}{d^2}
\end{array}\right\} \quad 29)$$

Dieser Vorzeichenwechsel rührt nun daher, daß die Fläche in einen andern Winkelraum der Ebenen $E_{1,2}$ übergeht. Der Übergang vollzieht sich indessen, wie wir unten bei der Erörterung der Lagebeziehung der Ebenen zur Fläche noch genauer sehen werden, nicht etwa in der Weise, daß die Ebenen durch die Fläche hindurchgingen, — dies ist unmöglich — sondern dadurch, daß sich die Winkelräume infolge des Durchgangs einer der sie bildenden Ebenen durch O vertauschen; und zwar passiert eine derjenigen Ebenen $E_{1,2}$ den O-Punkt, welche durch die durch 29c) und 28) bestimmten Punkte x_1, y_1 hindurchgehen.

Wegen des Wechsels des Vorzeichens wird also das Amiotsche Theorem beim zweischaligen Hyperboloid, wenn man statt der absoluten die relativen Abstände betrachtet, dahin abgeändert, daß nicht das Verhältnis des Entfernungsquadrates eines beliebigen Flächenpunktes von einem Punkte der Fokalellipse zu dem Rechteck aus den relativen Abständen von dem zugehörigen Ebenenpaar konstant ist, sondern nur der absolute Wert dieses Verhältnisses.

Etwas Ähnliches gilt ja auch bei der Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaft der Hyperbeln in der ebenen Geometrie:

Gibt man nämlich für den relativen senkrechten Abstand eines Punktes von einer Geraden die zu der in § 1 für den relativen senkrechten Abstand eines Punktes von einer Ebene gegebenen analoge Definition, so ist bei der Ellipse das Verhältnis der Entfernung eines ihrer Punkte von einem Brennpunkt zu dem relativen

senkrechten Abstand von der zugehörigen Direktrix konstant, während für die Hyperbel nur der absolute Wert dieses Verhältnisses konstant ist; es ist nämlich — vergl. Fig. 5 — für alle Punkte P des rechten Hyperbelzweiges r_1 positiv, dagegen ist es für alle Punkte des linken Astes negativ, während r immer positiv ist.

Welche Lage haben nun die durch die verschiedenen Direktrizen gehenden Kreisschnittebenen zur Fläche?

Daß $E_{1,2}$ das zweischalige Hyperboloid nie schneiden, ergibt sich wieder aus denselben Betrachtungen wie beim Ellipsoid in § 4:

Wir müssen also auch hier wieder die Ausdrücke

$$A^u_{44} \text{ und } A^u A'^u_{44}$$

untersuchen. Da $E_{1,2}$ die Gleichungen:

$$\frac{e}{a}\left(x - \frac{a^2}{e^2}x_0\right) \pm \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}}\left(y - \frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2}y_0\right) = 0$$

haben, so ist:

$$u = \frac{e}{a},\ v = \pm\sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}},\ w = 0,$$

$$s = -\frac{a}{e}x_0 \pm \sqrt{\frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2}}y_0;$$

dann wird nach den betreffenden Formeln in § 4:

$$-A^u_{44} = \frac{d^2}{a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)} > 0,$$

und

$$A^u A'^u_{44} = \frac{d^2 - \left(\frac{a}{e} x_0 + \sqrt{\frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2}}\, y_0\right)^2}{a^2 (a^2 - d^2)(a^2 - e^2)} \left\{ - \frac{e^2 - d^2}{(d^2 - a^2)(a^2 - e^2)} - \frac{e^2}{a^2 (a^2 - e^2)} - \frac{d^2}{a^2 (a^2 - d^2)} \right\}.$$

Infolge der Voraussetzung:

$$e > d > a$$

ist die geschweifte Klammer, die nach Vereinfachung den Wert $\frac{2d^2}{a^2 (d^2 - a^2)}$ erhält, positiv, d. h.

$$\text{sign } A^u A'^u_{44} = \text{sign } A^u =$$

$$\text{sign} \left[d^2 - \frac{a^2}{e^2} x_0^2 + \frac{2a}{e} \sqrt{\frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2}}\, x_0 y_0 - \frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2} y_0^2 \right].$$

Führt man statt y_0 den zugehörigen Wert x_0 aus der Gleichung der Fokalellipse ein, so erhält der fragliche Ausdruck die Form:

$$\frac{d^2 e^2 - a^2 x_0^2 + 2a x_0 \sqrt{(d^2 - a^2)(e^2 - x_0^2)} - (d^2 - a^2)(e^2 - x_0^2)}{e^2};$$

oder nach Fortlassung des positiven Nenners und Zusammenziehung:

$$x_0^2 (d^2 - a^2) - a^2 (e^2 - x_0^2) + 2a x_0 \sqrt{(d^2 - a^2)(e^2 - x_0^2)}$$

$$= \left[x_0 \sqrt{d^2 - a^2} + a \sqrt{e^2 - x_0^2} \right]^2 > 0;$$

d. h. $A^u A'^u_{44} > 0$; die Ebenen $E_{1,2}$ schneiden das zweischalige Hyperboloid also immer in einer imaginären Ellipse.

Diese imaginäre Ellipse ist nun wieder im besondern ein imaginärer Kreis; denn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für die mit einem konstanten Faktor multiplizierten Hauptachsen der Schnittellipse verschwindet auch hier; es ist nämlich — vergl. § 4 —:

$$(A'^{u}_{11})^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2) A^{u}_{11}$$
$$= \frac{4d^4}{a^4(d^2-a^2)^2} - 4\left(\frac{e^2}{a^2} + \frac{e^2-d^2}{d^2-a^2}\right)\frac{d^2}{a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)} = 0;$$

d. h. der Schnittkegelschnitt hat die Gleichungsform:

$$\xi^2 + \eta^2 + \alpha = 0.$$

Um den Verlauf der Kreisschnittebenen im einzelnen jetzt festzustellen, betrachten wir die zu den verschiedenen Punkten der Fokalellipse gehörigen Ebenenpaare:

1. Zu dem Scheitel der Fokalellipse F:

$$x_0 = e,\ y_0 = 0$$

gehört auf Grund von 11) als entsprechender Punkt:

$$x_1 = \frac{a^2}{e},\ y_1 = 0.$$

Das zugehörige Kreisschnittebenenpaar hat nach 25) die Gleichung:

$$\frac{e^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2 - \frac{e^2-d^2}{d^2-a^2}y^2 = 0 \quad \text{— vergl. Fig. 4 —. 30)}$$

2. Bewegt sich P_0 jetzt auf dem obern Teil der Fokalellipse in der Richtung abnehmender Werte von x,

so läuft P_1 nach den Formeln 11) wegen der Voraussetzung über die gegenseitige Größe von e, d und a auf dem untern Bogen der Durchschnittskurve des Direktrizenzylinders mit der xy-Ebene. Während dieser Bewegung nähert sich E_2 der rechten Schale des Hyperboloids; E_1 dagegen nähert sich dem linken Teil desselben — vergl. Fig. 4 — und gleichzeitig dem Punkte O, bis E_1 schließlich durch O selbst dann hindurchgeht, wenn das zugehörige $x_0 = \frac{e}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$ ist, wie sich in folgender Weise ergibt:

E_1 hat allgemein die Gleichung

$$\frac{e}{a}(x - x_1) + \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}}(y - y_1) = 0. \qquad 31)$$

Der Punkt P_0, für den $x_0 = \frac{e}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$ ist, hat, da er ja auf der Fokalellipse liegt, als y-Koordinate $y_0 = \frac{a}{d}\sqrt{e^2 - d^2}$ — die positive Wurzel ist deshalb zu nehmen, weil es sich um den im ersten Quadranten liegenden Bogen der Fokalellipse handelt —. Zu diesem Punkte x_0, y_0 gehört als zugeordneter Punkt P_1 mit den Koordinaten:

$$x_1 = \frac{a^2}{ed}\sqrt{d^2 - a^2},\quad y_1 = \frac{a}{d}\frac{a^2 - d^2}{\sqrt{e^2 - d^2}}.$$

Setzt man diese Werte in 31) ein, so folgt:

$$(E_1)\quad \frac{e}{a}\left(x - \frac{a^2}{ed}\sqrt{d^2 - a^2}\right) + \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}}\left(y - \frac{a}{d}\frac{(a^2 - d^2)}{\sqrt{e^2 - d^2}}\right) = 0,$$

oder:

$$\frac{e}{a}x + \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}}\,y = 0;$$

E_1 geht also durch O, und für sie wird daher der relative Abstand eines Punktes von ihr nach der in § 1 gegebenen Definition seinem Vorzeichen nach unbestimmt, wie es ja auch 29^c) aussagt.

Bis zu dieser Lage des Ebenenpaares war $x_0 > \frac{e}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$, d. h. nach 29^a) es war $\varepsilon = +1$; oder, da nach 26)

$$r^2 = \varepsilon \frac{d^2}{a^2}\frac{e^2 - a^2}{d^2 - a^2} r_1 r_2 \qquad 32)$$

ist, es war das Produkt der relativen Abstände positiv; und in der Tat sind, wie aus der Figur ersichtlich ist, r_1 und r_2 beide positiv für alle Punkte auf dem rechten Teil des Hyperboloids, für alle Punkte auf der linken Hyperboloidschale dagegen sind beide negativ. Nach dem Durchgang der Ebene E_1 durch O wird indessen bis zu einer gewissen andern Lage des Ebenenpaares r_1 negativ und r_2 positiv für alle Punkte der rechten Hyperboloidschale, während für alle Punkte auf der linken Schale des Hyperboloids r_1 positiv und r_2 negativ ist; $r_1 r_2$ wird also jetzt für alle Punkte des Hyperboloids negativ, wie es ja auch die Gleichung 32) fordert, da nach 29^b) $\varepsilon = -1$ für $x_0 < \frac{e}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$ ist.

3. Bei abnehmendem x_0 nähert sich E_2 der rechten Hyperboloidschale immer mehr, bis sie diese schließlich in dem Kreispunkte berührt:

Die Koordinaten der Kreispunkte sind, wenn man die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

annimmt:

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},\ y^2 = b^2 \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \qquad 33)$$

ersetzt man also b^2 durch $d^2 - a^2$ und c^2 durch $e^2 - a^2$, so erhält man die Koordinaten der Kreispunkte für den vorliegenden Fall:

$$x^2 \quad \frac{a^2 e^2}{d^2},\ y^2 - \frac{(d^2 - a^2)(e^2 - d^2)}{d^2}; \qquad 34)$$

es werden also die Koordinaten des rechten obern Kreispunktes:

$$x_0 = \frac{ae}{d},\ y_0 = \frac{\sqrt{(d^2 - a^2)(e^2 - d^2)}}{d}. \qquad 35)$$

Die Koordinaten des zugehörigen Punktes P_1 sind:

$$x_1 = \frac{a^3}{ed},\quad y_1 = -\frac{d^2 - a^2}{d}\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2}}.$$

Die durch diesen Punkt gehende Ebene E_2 hat daher nach 25) die Gleichung:

$$\frac{e}{a}\left(x - \frac{a^3}{ed}\right) - \sqrt{\frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}}\left(y + \frac{d^2 - a^2}{d}\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{e^2 - d^2}}\right) = 0.$$

Setzt man jetzt die Koordinaten des obigen Kreispunktes in diese Gleichung ein, so erfüllen sie dieselbe, d. h. E_2 geht durch den Kreispunkt.

4. Zu den Punkten $x_0 < \frac{ae}{d}$ gehören Ebenen E_2, die sich wieder von dem rechten Teil des Hyperboloids entfernen. Zum Nebenscheitel:

$$x_0 = 0,\ y_0 = \sqrt{e^2 - d^2}$$

der Fokalellipse gehört als zugeordneter Punkt:

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{e^2 - d^2}};$$

durch ihn geht das Kreisschnittebenenpaar:

$$\frac{e^2}{a^2}x^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}\left[y - \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{e^2 - d^2}}\right]^2 = 0.$$

5. Bewegt sich P_0 jetzt im zweiten Quadranten auf der Fokalellipse, so erhält man aus Symmetriegründen die analogen Lagebeziehungen des Ebenenpaares zur Fläche. E_1 nähert sich der linken Schale des Hyperboloids mit abnehmenden Werten von x_0, berührt sie im linken obern Kreispunkt und entfernt sich dann wieder von ihr. Unterdessen geht E_2 durch den Koordinatenanfangspunkt für $x_0 = -\frac{e}{d}\sqrt{d^2 - a^2}$ — die zweite Lösung der Gleichung 29^c). Mit diesem Durchgang von E_2 durch O ist dann wieder ein Vorzeichenwechsel des Produkts der relativen Abstände r_1 und r_2 verbunden.

6. Die Verhältnisse für die andern beiden Quadranten ergeben sich durch Spiegelung an der xz-Ebene und Vertauschung der Ebenen E_1 und E_2.

Man kann also beim zweischaligen Hyperboloid die Gesamtheit der Ebenen, die zur Amiotschen Erzeugung desselben dienen, in vier Gruppen zerlegen: Für alle Ebenen, die durch die Punkte P_1 von $2'$ bis $6'$ hindurchgehen — vergl. Fig. 4 — ist $r_1 r_2$ negativ; für die Ebenenpaare durch die Punkte P_1 von $6'$ bis zu seinem Spiegelbild an der xz-Ebene wird $r_1 r_2$ positiv; dann wird $r_1 r_2$ wieder negativ bis zu dem Spiegelbild von $2'$; und von da bis $2'$ erhält $r_1 r_2$ wieder positive Werte.

§ 7. Der elliptische Kegel.

Die der Amiotschen oder Mac Cullaghschen Erzeugung dienenden Fokalkegelschnitte der bisher behandelten Flächen zweiter Ordnung liegen — vergl. § 3, Satz I — entweder in der xy- oder xz-Ebene, während die Brennkurve der yz-Ebene imaginär wird, da nach dem Bildungsprinzip der Gleichungen der Fokalkurven, das ja formell dasselbe ist wie das der Brennpunktsgleichungen der Kegelschnitte, — vergl. Staude, analytische Geometrie pag. 964, Anm. 144 — ihre Gleichung.

$$\frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{e^2} = 1, \quad x = 0$$

lautet. Anders verhält es sich dagegen mit dem durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 0$$

gegebenen elliptischen Kegel, für den die obige Gleichung in

$$\frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{e^2} = 0,\ x = 0$$

übergeht; d. h. der elliptische Kegel besitzt in seiner Spitze einen dritten reellen Fokalkegelschnitt, — vergl. Cullagh, Surfaces of the second ordre pag. 282 — der zur Amiotschen Erzeugung dieser Fläche verwandt werden kann; denn es gilt, wie sich durch Ausrechnen sofort verifizieren läßt, die Identität:

$$a^2\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} - \frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}\left\{x^2 + y^2 + z^2\right\} - \left\{\frac{e^2z^2}{e^2-a^2} - \frac{d^2y^2}{a^2-d^2}\right\} \quad 36)$$

— vergl. Salmon-Fiedler, Raum I, pag. 264 —.

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von 36) ist r^2, wenn r den Abstand eines Punktes P = x, y, z vom Koordinatenanfangspunkt bedeutet; ferner ist, analog der Formel § 2, 11)

$$\frac{e^2z^2}{e^2-a^2} - \frac{d^2y^2}{e^2-d^2} = \frac{\varepsilon\, a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}\, r_1\, r_2,$$

wo r_1 und r_2 die relativ gemessenen Abstände des Punktes P von dem Ebenenpaar: $\frac{e^2z^2}{e^2-a^2} - \frac{d^2y^2}{a^2-d^2} = 0$ sind; ε wird hier sign 0, d. h. unbestimmt, da das Ebenenpaar, von dem die relativen Abstände gemessen werden, durch O geht. Setzt man nun aber fest, daß das Abstandsprodukt in dem die z-Achse enthaltenden Winkelraum positiv sei, so wird, wie aus der unten noch genauer angegebenen Lage des Ebenenpaares

folgt, $\varepsilon = +1$. Die Identität 36) erhält also die Gestalt:

$$a^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=r^2-\frac{a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}r_1r_2 \quad 37)$$

und liefert den Satz:

Für jeden Punkt des elliptischen Kegels: I.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}=0 \quad 38)$$

ist das Verhältnis des Quadrates seiner Entfernung vom Scheitel zu dem Produkt seiner relativen ⊥ Abstände von den Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}$.

Beachtet man nun, daß $\frac{r_1}{r}=\sin\alpha_1$ ist, wo α_1 den Winkel zwischen der durch P gehenden Erzeugenden des Kegels und der einen Kreisschnittebene bedeutet, und daß $\frac{r_2}{r}=\sin\alpha_2$ ist, mit analoger Bedeutung für α_2, so liefert 37) den schon von Châsles, Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré pag. 24 u. 41, angegebenen Satz — vergl. auch Salmon-Fiedler, Raum pag. 433 —:

Für jede Erzeugende des elliptischen Kegels 38) ist das Sinusprodukt der Winkel, die sie mit den beiden Kreisschnittebenen bildet, konstant, gleich $\frac{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}{a^2(e^2-d^2)}$. II.

Wie liegt nun dieses feste Kreisschnittebenenpaar zum Kegel?

Das Schnittresultat der Kreisschnittebenen

$$(E_{1,2}) \qquad \frac{e\,z}{\sqrt{e^2-a^2}} \pm \frac{d\,y}{\sqrt{a^2-d^2}} = 0$$

mit dem Kegel findet man wieder unter Benutzung von Staude, Analytische Geometrie § 114, Tab. (20); und zwar wird nach § 115, (42), (44), (46):

$$A^u = \frac{s^2}{a^2(a^2-d^2)(e^2-a^2)},$$

$$A^u_{44} \quad \frac{a^2u^2+(a^2-d^2)v^2-(e^2-a^2)w^2}{a^2(a^2-d^2)(e^2-a^2)}$$

$$A'^u = A^u(a^2+a^2-d^2-e^2+a^2)+A^u_{44}.$$

Für die Ebenen $E_{1,2}$ werden diese Ausdrücke:

$$A^u = 0,\ A^u_{44} = \frac{d^2-e^2}{a^2(a^2-d^2)(e^2-a^2)} < 0,$$

$$-A'^u = -A^u_{44} > 0,$$

d. h. das Schnittresultat des Ebenenpaares mit dem Kegel ist ein imaginäres Linienpaar.

Dieses Linienpaar hat nach Staude, Analytische Geometrie § 114, Tab. (20) die Normalform:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=0;$$

da auch hier — vergl. § 4 — nach Staude, § 109, (16) und § 115, (47) die Diskriminante der Hauptachsentransformationsgleichung verschwindet, so wird $\alpha^2=\beta^2$; d. h. das imaginäre Linienpaar ist das Kreisstrahlenpaar durch die Kegelspitze.

Somit folgt der Satz:

Das feste zur Amiotschen Erzeugung des Kegels dienende Ebenenpaar schneidet ihn in dem durch seine Spitze gehenden Kreisstrahlenpaar der yz-Ebene. III.

Da die Kreisschnittebenen den Kegel in einem imaginären Geradenpaar schneiden, so folgt, daß sie ganz außerhalb des Kegels liegen; und zwar liegen alle Punkte des Kegels in dem die z-Achse enthaltenden Winkelraum dieser Ebenen; folglich wird nach unsern obigen Festsetzungen, wie behauptet, $\varepsilon = +1$ — vergl. Fig. 6, in der L_1 und L_2 die Schnittgeraden des Kegels mit der yz-Ebene bedeuten —.

Mit der Voraussetzung

$$d^2 = 0$$

vollziehen wir den Übergang auf den Sonderfall des Rotationskegels. Die Identität 36) vereinfacht sich dann in:

$$a^2\left\{\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2-a^2}\right\} = x^2+y^2+z^2 - \frac{e^2z^2}{e^2-a^2}$$
$$= r^2 - \frac{e^2}{e^2-a^2}r_1^2,$$

wo r_1 der relative $\perp$ Abstand des Punktes P von der Ebene $z=0$ ist. Die Identität liefert also den Satz:

Für jeden Punkt des Rotationskegels: IV.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2-a^2} = 0$$

ist der absolute Wert des Verhältnisses seiner Entfernung vom Scheitel zu seinem relativen $\perp$ Abstand von der Hauptebene konstant, gleich $\frac{e}{\sqrt{e^2-a^2}}$ — vergl. Cullagh, Surfaces, pag. 283 —.

Es bleibt hier nur der absolute Wert des Verhältnisses konstant, da die Punkte des Doppelkegels auf verschiedenen Seiten der Hauptebene liegen.

Satz IV ist ja, wie aus Fig. 7 hervorgeht, selbstverständlich, denn der Wert des Verhältnisses $\frac{r}{r_1}$ ist sec $\alpha/_2$, wenn α den Öffnungswinkel des Kegels bedeutet, also konstant.

Anstatt nun den Kegel durch die ihn erzeugenden geraden Linien zu geben, kann man ihn dual durch die Gesamtheit seiner Tangentialebenen bestimmen; führt man diese Bestimmung so aus, daß man jeder Erzeugenden eines Ausgangskegels diejenige durch seine Spitze gehende Ebene zuordnet, zu der die Erzeugende senkrecht steht, so umhüllen diese Ebenen den zu dem erstern Kegel reziproken; und errichtet man umgekehrt im Kegelscheitel die auf den Tangentialebenen senkrecht stehenden Geraden, so erzeugen diese ebenfalls den Reziprokalkegel des ursprünglichen — vergl. Châsles, Cônes, pag. 7 ff. —. Den Kreisschnittebenen des einen Kegels entsprechen bei dieser Zuordnung die Brennlinien des andern. Daher entspricht jedem Satz über die Kreisschnittebenen ein dualer über die Fokallinien und umgekehrt, und anstatt den dualen Satz am Reziprokalkegel zu betrachten, kann man ihn auch wieder am Ausgangskegel erörtern, da ja beides elliptische Kegel sind. Auf Grund dieses Prinzips können wir nach dem zu Satz II dualen fragen — vergl. Châsles, pag. 24, und Salmon-Fiedler, Raum pag. 433.

Die Brennlinien des elliptischen Kegels 38) haben, wie weiter unten noch analytisch bewiesen wird, die Gleichungen:

$$x : y : z = \frac{d}{e} : 0 : \frac{\pm\sqrt{e^2 - d^2}}{e};$$

die sinus der Winkel α_1 und α_2, die die laufende Ebene u, v, w mit ihnen bildet, haben nach Staude, Analytische Geometrie der Ebene pag. 197, die Werte:

$$\sin\ \alpha_{1,2} = \frac{du \pm \sqrt{e^2 - d^2}\, w}{e\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

da nun $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 = \frac{d^2u^2 - (e^2 - d^2)w^2}{e^2(u^2 + v^2 + w^2)}$ ist, und weil ferner die ohne weiteres zu verifizierende Identität:

$$\frac{d^2u^2 - (e^2 - d^2)w^2}{e^2(u^2 + v^2 + w^2)} \quad \frac{d^2 - a^2}{e^2}$$
$$\frac{a^2u^2 + (a^2 - d^2)v^2 - (e^2 - a^2)w^2}{e^2(u^2 + v^2 + w^2)} \qquad 39)$$

gilt, so folgt der Satz:

Für jede Tangentialebene des elliptischen Kegels 38) V. ist das Sinusprodukt der Winkel, die sie mit den beiden Brennlinien bildet, konstant, gleich $\frac{d^2 - a^2}{e^2}$.

Für den Kegel mit rechtwinkeligen Brennlinien, bei dem ja $e^2 = 2(a^2 - d^2)$ wird, erhält dieses konstante Produkt den Wert $-\frac{1}{2}$, und für den Rotationskegel

wird es gleich $-\frac{a^2}{e^2}$. Wie aus 39) folgt, kann man dem Satz V auch die Gestalt geben — vergl. Châsles pag. 41 unten —:

Der elliptische Kegel ist, als Fläche zweiter Klasse betrachtet, der Ort einer Ebene, für die das Sinusprodukt ihrer Winkel mit zwei festen Geraden konstant ist; wobei diese geraden Linien den Fokallinien desselben parallel sind.

Neben dieser letzten und der zu ihr dualen Amiotschen Erzeugungsart gibt es nun noch eine Fülle von Möglichkeiten, den elliptischen Kegel zu erzeugen, für die im folgenden Identitäten abgeleitet werden sollen, um aus diesen die fast überall auftretenden Konstanten zahlenmäßig festzustellen und eventuell zu spezialisieren.

Um zunächst die Identitäten der Mac Cullaghschen Erzeugungsweisen herzuleiten, gehen wir von der Gleichung § 3, 12) aus, die wir für den elliptischen Kegel auf die Form:

$$\begin{aligned}(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}\\ =\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\}\\ -\left\{\frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}(y-y_1)^2\right\}\end{aligned} \qquad 40)$$

bringen, wobei auf Grund von 8), 7) u. § 3, Satz I die Punkte $P_0 = x_0, y_0, 0$ der Gleichung

$$\frac{x_0^2}{e^2}+\frac{y_0^2}{e^2-d^2}=0$$

genügen müssen; d. h. die Fokalellipse zieht sich in den Kegelscheitel und der Direktrizenzylinder wegen 11) in die z-Achse zusammen. Die Identität 40) geht dadurch über in — vergl. Salmon-Fiedler, Raum I, pag. 264 —:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2}\right\} = x^2 + y^2 + z^2 - \left\{\frac{e^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}y^2\right\}. \qquad 41)$$

Nun ist nach Staude, Analytische Geometrie, pag. 690 (10) $\frac{e^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}y^2 - \frac{e^2}{a^2}s^2$, wo s den parallel dem Ebenenpaar $\frac{d^2 y^2}{a^2 - d^2} - \frac{e^2 z^2}{e^2 - a^2} = 0$ — den Hauptkreisschnittebenen des elliptischen Kegels — gemessenen Abstand des Punktes P von der z-Achse bedeutet. 41) erhält also die Gestalt:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2}\right\} = r^2 - \frac{e^2}{a^2}s^2$$

und liefert den Satz:

VI. Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis seiner Entfernung von der Spitze zu dem schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstand von der z-Achse konstant, gleich $\frac{e}{a}$ — vergl. Cullagh, Surfaces, pag. 282 —.

Wie das einschalige Hyperboloid läßt sich nun auch der Kegel noch auf eine zweite Art in Mac Cullaghs Weise erzeugen.

Die Identität § 3, 12′) lautet nämlich für den elliptischen Kegel 38) umgeformt:

$$(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}$$
$$=\left\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\right\} \qquad 42)$$
$$-\left\{\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}(z-z_1)^2\right\},$$

wo x_0, y_0 nach 8′), 7) und § 3, Satz I der Gleichung

$$\frac{x^2}{d^2}-\frac{z^2}{e^2-d^2}=0,\ y=0 \qquad 43)$$

genügen müssen, während auf Grund von 11′) x_1, z_1 die Gleichung

$$\frac{d^2}{a^4}x_1^2-\frac{e^2-d^2}{(e^2-a^2)^2}z_1^2=0 \qquad 44)$$

erfüllen — vergl. Salmon-Fiedler, pag. 264, wo diese Identität für den Spezialfall $P_0=O$ sich findet —. Beachtet man ferner, daß nach Staude, Geometrie pag. 691

$$\frac{d^2}{a^2}(x-x_1)^2+\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}(z-z_1)^2=\frac{d^2}{a^2}s^2$$

ist, wo s den parallel den Hauptkreisschnittebenen des Kegels gemessenen Abstand des Punktes P von der parallel der y-Achse durch x_1, z_1 gehenden Geraden bedeutet, und bezeichnet man endlich die Entfernung des Punktes P von P_0 durch r, so geht 42) über in:

$$(a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=r^2-\frac{d^2}{a^2}s^2. \qquad 45)$$

Die Punkte P_0 liegen auf den durch 43) gegebenen Geraden, die wir schon oben als Brennlinien des Kegels

bezeichnet haben; die Direktrizen durch die Punkte P_1, von denen die schrägen Abstände zu messen sind, liegen in den durch 44) bestimmten Ebenen, die man — vergl. Châsles, Cônes pag. 29; Cullagh, Surfaces pag. 262 — als Direktrixebenen bezeichnet. Unter Berücksichtigung dieser Bezeichnungsweisen liefert 45) den Satz:

VII. Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis seiner Entfernung von einem Punkte der Fokallinien zu dem schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstand von der zugeordneten Direktrix konstant, gleich $\frac{d}{a}$.

Der elliptische Kegel läßt sich also sowohl auf Amiots Weise als auch auf zweifache Cullaghsche Art konstruieren; bezeichnet man nun die bei diesen Erzeugungsweisen auftretenden Konstanten als Moduln, so können wir nach dem Zusammenhang derselben fragen, und da gilt zunächst für die Cullaghschen Moduln die von Cullagh, pag. 272, allgemein angegebene Gleichung:

$$\frac{\cos^2 \Phi}{m^2} + \frac{\sin^2 \Phi}{m'^2} = 1, \qquad 46)$$

wo Φ der Winkel ist, den eine Kreisschnittebene mit der Ebene desjenigen Fokalkegelschnittes bildet, zu dem der Modul m gehört; denn bezeichnet man den Modul $\frac{e}{a}$ mit m und $\frac{d}{a}$ mit m', so wird, da $\cos^2 \Phi = \frac{e^2 (a^2 - d^2)}{a^2 (e^2 - d^2)}$ ist, 46) erfüllt. Der Modul der Amiotschen

Erzeugungsweise $\varkappa^2$ hat den Wert $\frac{a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}$ und ist durch folgende Relationen mit den Cullaghschen Moduln verbunden:

$$\frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 2\Phi} = \frac{1}{(2m')^2} - \frac{1}{(2m)^2},$$

wo Φ die oben angegebene Bedeutung hat, oder

$$\varkappa^2 = \frac{1}{1-m'^2} - \frac{1}{1-m^2}.$$

Durch Kombination der oben angeführten 3 Erzeugungsarten lassen sich nun neue herleiten, die letzten Endes darauf beruhen, daß die Kegelspitze ein dreifacher Brennpunkt ist; so folgt durch Subtraktion der Gleichung 41) von 36) die Identität:

$$e^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=\left\{\frac{e^2}{a^2}x^2+\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}y^2\right\} - \left\{\frac{e^2z^2}{e^2-a^2}-\frac{d^2y^2}{a^2-d^2}\right\}. \quad 47)$$

Da nun nach unsern obigen Formeln:

$$\frac{e^2}{a^2}x^2+\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}y^2=\frac{e^2}{a^2}s^2$$

und $\frac{e^2z^2}{e^2-a^2}-\frac{d^2y^2}{a^2-d^2}=\frac{a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}r_1r_2$

ist*), wobei s, r_1 und r_2 die früher angegebene Bedeutung haben, so geht 47) über in:

*) Es wird hier, wie im folgenden beim Kegel überhaupt, auf ε keine Rücksicht genommen, sondern es werden die Abstände immer als absolute Größen betrachtet, da ja alle fraglichen Ebenen durch O gehen.

$$a^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}$$
$$=s^2-\frac{a^4(e^2-d^2)}{e^2(e^2-a^2)(a^2-d^2)}r_1 r_2$$

und liefert daher den Satz:

VIII. Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis des Quadrates des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der z-Achse zu dem Abstandsprodukt von den beiden Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{a^4(e^2-d^2)}{e^2(e^2-a^2)(a^2-d^2)}$.

Spezialisiert man ferner die Identität 42) dadurch, daß man, anstatt alle Fokalpunkte zu betrachten, sich auf den Anfangspunkt beschränkt, so ergibt sich durch Subtraktion dieser Gleichung von 36) die Identität:

$$d^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=\left\{\frac{d^2}{a^2}x^2+\frac{e^2-d^2}{e^2-a^2}z^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{e^2z^2}{e^2-a^2}-\frac{d^2y^2}{a^2-d^2}\right\}=\frac{d^2}{a^2}s^2-\frac{a^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)(a^2-d^2)}r_1 r_2;$$

oder:

$$a^2\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=s^2-\frac{a^4(e^2-d^2)}{d^2(e^2-a^2)(a^2-d^2)}r_1 r_2;$$

d. h. es folgt der Satz:

IX. Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis des Quadrates seines schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der y-Achse zu dem Abstandsprodukt von den beiden Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{a^4(e^2-d^2)}{d^2(e^2-a^2)(a^2-d^2)}$.

Durch Vereinigung der wie eben spezialisierten Identität 42) mit 41) ergibt sich für die kombinierte Mac Cullaghsche Erzeugungsart die Gleichung:

$$(e^2 - d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2}\right\} = \left\{\frac{e^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}y^2\right\}$$

$$- \left\{\frac{d^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2}z^2\right\},$$

d. h. wir erhalten den Satz:

X. Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis seines schrägen Abstandes von der z-Achse zu dem schrägen Abstand von der y-Achse konstant, gleich $\frac{d}{a}$, — wobei die Abstände jedesmal parallel einer der Kreisschnittebenen zu messen sind.

Eine der letztgenannten ähnliche Erzeugungsweise läßt sich aus folgender Identität ableiten:

$$(a^2 - d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2}\right\}$$
$$= x^2 + y^2 - \left\{\frac{d^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2 - d^2}{e^2 - a^2}z^2\right\}. \qquad 48)$$

Da $x^2 + y^2$ das Quadrat des senkrechten Abstandes des Punktes P von der z-Achse bedeutet, und da — vergl. Staude pag. 691 —

$$\frac{d^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2 - d^2}{e^2 - a^2}z^2 = \frac{d^2}{a^2}s^2 \text{ oder } \frac{a^2 - d^2}{e^2 - a^2}s^2 \text{ ist,}$$

e nachdem $e^2 d^2 < a^4$ oder $> a^4$ ist, wobei s den $\parallel$ den Ebenenpaaren:

$$\text{a)}\quad \frac{\sqrt{a^4 - e^2 d^2}}{e^2 - a^2} z^2 - \frac{d^2 y^2}{\sqrt{a^4 - e^2 d^2}} = 0 \text{ oder}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\sqrt{e^2 d^2 - a^4}}{a^2 - d^2} x^2 - \frac{a^2 y^2}{\sqrt{e^2 d^2 - a^4}} = 0 \qquad 49)$$

gemessenen schrägen Abstand des Punktes P von der y-Achse bedeutet, so liefert 48) den Satz:

Für jeden Punkt des elliptischen Kegels 38) ist das Verhältnis des senkrechten Abstandes von der z-Achse zu dem schrägen, parallel den Ebenen 49 a) oder b) gemessenen Abstande von der y-Achse konstant, gleich $\frac{d}{a}$ oder $\sqrt{\frac{a^2 - d^2}{e^2 - a^2}}$, je nachdem $e^2 d^2 < a^4$, oder $> a^4$ ist.

Weitere Möglichkeiten, den Kegel 38) zu konstruieren, gründen sich auf die Beziehungen der Direktrixebenen zu den Brennlinien und auf die Relationen dieser Ebenen oder Linien zu den Tangentialebenen oder Erzeugenden des Kegels. Zunächst soll die Brennstrahl-Direktrixebeneneigenschaft des Kegels hier Erwähnung finden — vergl. Châsles, Cônes pag. 29, 42 ff.; Salmon-Fiedler, Raum pag. 436; Staude, Geometrie pag. 710 —.

Das Quadrat des ⊥ Abstandes eines beliebigen Punktes P = x, y, z von den durch 43) gegebenen Brennlinien hat — nach Magnus, Aufgaben 2, pag. 29 — den Wert:

$$\varrho^2 = \frac{e^2 - d^2}{e^2} y^2 + \left[+ \frac{\sqrt{e^2 - d^2}}{e} x - \frac{d}{e} z \right]^2 + \frac{d^2}{e^2} y^2$$

$$= y^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2} x^2 + \frac{2 d x z \sqrt{e^2 - d^2}}{e^2} + \frac{d^2}{e^2} z^2;$$

ferner hat das Abstandsquadrat des Punktes P von den Direktrixebenen 44) die Größe:

$$\delta^2 = \frac{(d\,(a^2 - e^2)\,x \pm a^2 \sqrt{e^2 - d^2}\,z)^2}{e^2\,[a^2\,(a^2 - d^2) + (e^2 - a^2)\,d^2]}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\varkappa^2 = \frac{a^2\,(a^2 - d^2) + (e^2 - a^2)\,d^2}{a^2\,(e^2 - a^2)}, \text{ so wird}$$

$$\varrho^2 - \varkappa^2\,\delta^2 = \left\{ y^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2}\,x^2 + \frac{d^2}{e^2}\,z^2 \right\} \qquad 50)$$

$$- \left\{ \frac{(e^2 - a^2)\,d^2}{a^2\,e^2}\,x^2 + \frac{a^2\,(e^2 - d^2)}{e^2\,(e^2 - a^2)}\,z^2 \right\},$$

und es ergibt sich durch Zusammenziehen der rechten Seite folgende Identität in x, y, z:

$$(a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} \right\} = \varrho^2 - \varkappa^2\,\delta^2,$$

und daraus der Satz:

XII. Der elliptische Kegel 38) ist der Ort eines Punktes, dessen Abstandsverhältnis von einer Brennlinie und der zugehörigen Direktrixebene den konstanten Wert $\varkappa$ hat. Für den Rotationskegel folgt mit $d^2 = 0$ aus 50) $\varkappa^2 = \frac{a^2}{e^2 - a^2}$; für den Kegel des Hachette, für den $a^2 = e^2 - a^2$ ist, wird $\varkappa^2 = 1$.

Gibt man dem letzten Satz die Form, daß in jedem Kegel das Sinusverhältnis derjenigen Winkel, die eine Erzeugende mit einer Brennlinie und der zugehörigen Direktrixebene bildet, konstant ist, so

kann man nach dem zu diesem Satze dualen fragen — vergl. Châsles, Cônes pag. 29 u. 42.

Nach dem oben erläuterten Prinzip der Dualität entspricht der Brennlinie und Direktrixebene, die — vergl. Châsles, pag. 29 — Polare und zugeordnete Polarebene in bezug auf den Kegel sind, des einen Kegels Kreisschnittebene und die dieser zugeordnete Polare des Reziprokalkegels. Es müssen also die Sinus der Winkel einer Tangentialebene und der Kreisschnittebenen resp. ihrer Polaren bestimmt werden.

Die Polaren der Kreisschnittebenen

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-d^2}} \pm \frac{ez}{\sqrt{e^2-a^2}} = 0$$

haben nach Staude, Analytische Geometrie pag. 457, die Gleichungen:

$$x : y : z = 0 : d\sqrt{a^2-d^2} : \pm e\sqrt{e^2-a^2}.$$

Die sinus der Neigungswinkel χ dieser Polaren gegen die beliebige Ebene u, v, w sind:

$$\sin\chi = \frac{d\sqrt{a^2-d^2}\,v \pm e\sqrt{e^2-a^2}\,w}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)\,[(a^2-d^2)\,d^2+(e^2-a^2)\,e^2]}},$$

und für die Winkel ψ zwischen der beliebigen Ebene und den Kreisschnittebenen gilt:

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\left(\pm\frac{ev}{\sqrt{e^2-a^2}} - \frac{dw}{\sqrt{a^2-d^2}}\right)^2 + \frac{e^2u^2}{e^2-a^2} + \frac{d^2u^2}{a^2-d^2}}{\left(u^2+v^2+w^2\right)\frac{a^2(e^2-d^2)}{(a^2-d^2)(e^2-a^2)}}}.$$

— Die Festlegung der infolge des Durchgangs der betreffenden Ebenen durch O unbestimmt werdenden Vorzeichen ist unnötig, da wir die trigonometrischen Funktionen quadrieren —.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\varkappa^2 = \frac{e^2 + d^2 - a^2}{a^2},$$

so wird

$$\begin{aligned}
&(\sin^2\psi - \varkappa^2 \sin^2\chi)(u^2 + v^2 + w^2)(e^2 - d^2) \\
&= \frac{(e^2 - a^2)(a^2 - d^2)}{a^2}\left[\frac{e^2 v^2}{e^2 - a^2} + \frac{d^2 w^2}{a^2 - d^2} + \frac{a^2 (e^2 - d^2) u^2}{(a^2 - d^2)(e^2 - a^2)}\right] \\
&\quad - \varkappa^2 \frac{d^2 (a^2 - d^2) v^2 + e^2 (e^2 - a^2) w^2}{e^2 + d^2 - a^2} \qquad 51) \\
&= \frac{e^2 - d^2}{a^2}\left\{a^2 u^2 + (a^2 - d^2) v^2 - (e^2 - a^2) w^2\right\}.
\end{aligned}$$

Da die geschweifte Klammer der Identität 51) gleich 0 gesetzt die Gleichung des elliptischen Kegels 38) in Linienkoordinaten ist, so ergibt sich der Satz:

Für jede Tangentialebene des elliptischen Kegels 38) ist das Sinusverhältnis der Winkel, die sie mit einer Kreisschnittebene und der Polaren derselben bildet, konstant, gleich $\frac{e^2 + d^2 - a^2}{a^2}$. XIII.

Der Wert dieser Konstanten wird speziell 1 für $e^2 - a^2 = a^2 - d^2$, d. h. für den Kegel des Pappus, der ja der Reziprokalkegel des bei der dualen Erzeugung als Sonderfall für $\varkappa = 1$ erhaltenen Kegels des Hachette ist.

Es folgt somit der auch von Th. Meyer — Über die Kegel des Pappus und des Hachette pag. 17*) — synthetisch abgeleitete Satz:

Jede Tangentialebene des Kegels des Pappus bildet mit einer Kreisschnittebene desselben und der zugehörigen Polaren gleiche Winkel. XIV.

Eine weitere Erzeugungsart des Kegels 38) ergibt sich, wenn man nach dem geometrischen Ort eines Strahles im Strahlbündel fragt, dessen Winkel ϱ und ϱ', gegen zwei feste Strahlen f und f' die konstante Summe oder Differenz $\pm 2\alpha$ haben — vergl. Châsles, Cônes pag. 21; Salmon-Fiedler, Raum pag. 435, Staude, Geometrie pag. 718 ff. —.

Dadurch, daß man dem laufenden Strahle p und den festen Geraden f und f' durch Hinzufügung von Pfeilspitzen eine bestimmte Richtung gibt, erhält man unter der Voraussetzung, daß ϱ und ϱ' kleiner als π sind und α ein spitzer Winkel ist, die vier Möglichkeiten:

$$\varrho + \varrho' = 2\alpha,\ \varrho + \varrho' = 2\pi - 2\alpha,\ \varrho - \varrho' = \pm 2\alpha,$$

oder die damit gleichwertigen Bedingungen:

$$\sin\frac{\varrho+\varrho'}{2} = \pm\sin\alpha,\ \sin\frac{\varrho-\varrho'}{2} = \pm\sin\alpha.$$

Der gesuchte geometrische Ort hat daher die Gleichung:

$$0 = \left(\sin\frac{\varrho+\varrho'}{2} + \sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\varrho+\varrho'}{2} - \sin\alpha\right)$$
$$\left(\sin\frac{\varrho-\varrho'}{2} + \sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\varrho-\varrho'}{2} - \sin\alpha\right). \qquad 52)$$

*) Inaugural-Dissertation, Straßburg 1884.

Um diese Bedingung in rechtwinkelige Koordinaten umzuformen, führen wir ein Koordinatensystem Oxyz derart ein, daß die Geraden f und f′ die xz-Ebene bestimmen, wobei die z-Achse den Winkel 2ε derselben halbieren möge; ferner nehmen wir zur geometrischen Deutung der Konstanten α zwei in der xz-Ebene liegende Gerade g und g′ so an, daß sie mit der z-Achse den Winkel α bilden. Die Richtungscosinus der Strahlen haben dann die Werte:

$$f, f' : \pm \sin\varepsilon,\ 0,\ \cos\varepsilon;$$
$$g, g' : \pm \sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha;$$

und die Richtungscosinus des laufenden Strahles p bezeichnen wir mit: $\lambda,\ \mu,\ \nu$.

Führt man dann anstatt der Winkel α und ε die Größen a, d und e durch die Gleichungen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{e} \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon = \frac{d}{e} \qquad 53)$$

ein, so sind die Winkel der laufenden Geraden p mit den festen f und f′ gegeben durch:

$$\cos\varrho = \frac{\lambda d}{e} + \frac{\nu\sqrt{e^2 - d^2}}{e},\quad \cos\varrho' = -\lambda\frac{d}{e} + \frac{\nu\sqrt{e^2 - d^2}}{e};$$

bezeichnet man dann die linke Seite von 52) durch S, so wird auf Grund goniometrischer Relationen und der Formeln 53) — vergl. Staude, Geometrie pag. 720 —

$$S = \frac{d^2}{e^2}\lambda^2 - \left(1 + \frac{d^2}{e^2}\lambda^2 - \frac{e^2 - d^2}{e^2}\nu^2\right)\frac{a^2}{e^2} + \frac{a^4}{e^4}.$$

Durch Multiplikation des letzten Summanden mit

$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ und durch Zusammenziehen ergibt sich die Identität — es ist nämlich $x = \lambda r$, $y = \mu r$, $z = \nu r$ —

$$a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2}\right) \quad 54)$$
$$= e^4 S^2 (x^2 + y^2 + z^2);$$

beachtet man ferner, daß die Strahlen f und f' nach 53) die Gleichung:

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 0 \text{ haben,}$$

d. h. die Brennstrahlen des elliptischen Kegels 38) sind, so liefert 54) den Satz:

Für jede Erzeugende des Kegels 38) ist die Summe oder Differenz der Winkel, die sie mit den Brennlinien bildet, konstant, gleich 2α *). XV.

Wird $e^2 - a^2 = a^2$ oder $\frac{a^2}{e^2} = \frac{1}{2}$, so ist nach 53)

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder $\alpha = \frac{\pi}{4}$; es folgt also der Satz:

Jede Erzeugende des Kegels des Hachette bildet mit den Brennlinien Winkel, deren Summe 1 R ist. XVI.

Für den speziellen Kegel, für den $a^2 = 3(e^2 - a^2)$ ist, wird die konstante Winkelsumme oder Differenz 120^0; ist $3a^2 = e^2 - a^2$, so wird sie 60^0.

Dual können wir nach dem Ort einer Ebene im Ebenenbündel fragen, deren Winkel ϱ und ϱ' gegen zwei feste Ebenen E_1 und E_2 die konstante Summe oder

*) Für die Voraussetzung $e^2 > a^2 > d^2$ ist nur die Summe, nicht die Differenz konstant — vergl. Staude, Geometrie, pag. 722.

Differenz $\pm 2\alpha$ haben — vergl. Chasles, Cônes, pag. 21 —.

Dadurch, daß man sämtliche Ebenen richtet, erhält man unter der Voraussetzung, daß ϱ und ϱ' kleiner als π sind und α ein spitzer Winkel ist, wie oben, als Gleichung für den geometrischen Ort:

$$S \equiv \left(\sin^2\frac{\varrho+\varrho'}{2} - \sin^2\alpha\right)\left(\sin^2\frac{\varrho-\varrho'}{2} - \sin^2\alpha\right) = 0.$$

Um diese Bedingung in rechtwinkelige Koordinaten umzuformen, führen wir ein Koordinatensystem Oxyz derart ein, daß die x-Achse mit der Schnittlinie der festen Ebenen zusammenfällt, in der durch das Bündelzentrum gehenden und die hier errichteten Normalen der festen Ebenen enthaltenden yz-Ebene nehmen wir die z-Achse so an, daß sie den Winkel 2ε der positiven Normalen auf E_1 und E_2 halbiert; ferner nehmen wir zur geometrischen Deutung der Konstanten α zwei durch die x-Achse gehende Ebenen G_1 und G_2 so an, daß ihre positiven Normalen mit der z-Achse den Winkel α bilden. Dann haben die Richtungscosinus der Ebenennormalen die Werte:

$$(E_1, E_2) : 0, \pm\sin\varepsilon, \cos\varepsilon$$
$$(G_1, G_2) : 0, \pm\sin\alpha, \cos\alpha.$$

Werden die Richtungscosinus der positiven Normalen der laufenden Ebene mit λ, μ, ν bezeichnet, so sind die Winkel der laufenden Ebene mit E_1 und E_2 gegeben durch:

$$\cos\varrho = \mu\sin\varepsilon + \nu\cos\varepsilon,\ \cos\varrho' = -\mu\sin\varepsilon + \nu\cos\varepsilon.$$

Führen wir nun anstatt der Winkel α und ε die Größen a, d und e durch die Relationen:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2}},\quad \sin\varepsilon = \frac{d}{a}\sqrt{\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2}} \qquad 55)$$

ein, so wird S, welches durch goniometrische Umformungen, wie oben, den Wert

$$\left(\frac{\cos\varrho - \cos\varrho'}{2}\right)^2 - (1 - \cos\varrho\cos\varrho')\ \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

erhält, gleich

$$\frac{\mu^2 d^2}{a^2}\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2} - \left[1 + \frac{d^2}{a^2}\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2}\mu^2 - \frac{e^2}{a^2}\frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2}\nu^2\right]\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2} + \left(\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2}\right)^2$$

oder zusammengezogen, nachdem man den letzten Summanden mit $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ multipliziert hat:

$$\frac{a^2(e^2 - d^2)^2}{(e^2 - a^2)(d^2 - a^2)}S = a^2\lambda^2 + (a^2 - d^2)\mu^2 - (e^2 - a^2)\nu^2. \qquad 56)$$

Ersetzt man nun die Richtungscosinus der Normalen der laufenden Ebene durch die Koordinaten u, v, w derselben, so geht 56) wegen

$$\lambda = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},\quad \mu = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

$$\nu = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

über in:

$$\frac{a^2(e^2 - d^2)^2(u^2 + v^2 + w^2)}{(e^2 - a^2)(d^2 - a^2)}S = a^2u^2 + (a^2 - d^2)v^2 - (e^2 - a^2)w^2; \qquad 57)$$

da nun die festen Ebenen E_1 und E_2 wegen 55) die Gleichung $\frac{e^2 z^2}{e^2 - a^2} - \frac{d^2 y^2}{a^2 - d^2} = 0$ haben, d. h. die Hauptkreisschnittebenen des elliptischen Kegels 38) sind, so folgt aus 57) der Satz:

XVII. Jede Tangentialebene des elliptischen Kegels bildet mit den Kreisschnittebenen derselben Winkel, deren Summe oder Differenz konstant, gleich $\pm 2\alpha$ ist.*)

Da nach 55) $\sin \alpha = \sqrt{\frac{e^2 - a^2}{e^2 - d^2}}$ ist, so wird für den Kegel des Pappus, $[a^2 - d^2 = e^2 - a^2]$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, oder $\alpha = \frac{\pi}{4}$, und wir erhalten somit den Satz:

XVIII. Jede Tangentialebene des Kegels des Pappus bildet mit den Kreisschnittebenen desselben Winkel, deren Summe konstant, gleich $\frac{\pi}{2}$ ist — vergl. Th. Meyer, Dissert. pag. 18 —.

Bei dem speziellen Kegel, für den $e^2 - a^2 = 3(d^2 - a^2)$ ist, wird die konstante Winkelsumme $\frac{2\pi}{3}$, und für $d^2 - a^2 = 3(e^2 - a^2)$ wird sie $\frac{\pi}{3}$.

Auch der von Châsles auf pag. 16 seines Werkes synthetisch abgeleitete Satz, daß die durch die beiden Brennlinien eines elliptischen Kegels und durch eine seiner Erzeugenden gelegten Ebenen mit der Tangential-

*) Betreffend die Differenz vergl. Anm. zu Satz XV.

ebene durch diese Erzeugende gleiche Winkel bilden, läßt sich analytisch aus einer Identität schließen.

Die Ebenen durch die Fokallinien 43) und die Erzeugende x, y, z haben nach Staude, Geometrie des Punktepaares pag. 197, (20) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(E_1) \quad & +\sqrt{e^2-d^2}\,y\,X+(dz-\sqrt{e^2-d^2}\,x)\,Y \\ & -dy\,Z=0 \\ (E_2) \quad & -\sqrt{e^2-d^2}\,y\,X+(dz+\sqrt{e^2-d^2}\,x)\,Y \\ & -dy\,Z=0,\end{aligned} \qquad 58)$$

wo X, Y, Z die Koordinaten des laufenden Punktes der Ebenen $E_{1,2}$ sind.

Die Gleichung der Tangentialebene an den Kegel 38) durch die Erzeugende x, y, z lautet:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{a^2-d^2}-\frac{zZ}{e^2-a^2}=0.$$

Bezeichnet man nun die Winkel zwischen letzterer und $E_{1,2}$ mit ϱ_1 und ϱ_2, so wird

$$\cos\varrho_1=\frac{\frac{xy\sqrt{e^2-d^2}}{a^2}+\frac{dyz-\sqrt{e^2-d^2}\,xy}{a^2-d^2}+\frac{dyz}{e^2-a^2}}{\sqrt{[e^2y^2+d^2z^2+(e^2-d^2)x^2-2dxz\sqrt{e^2-d^2}]\,u^2}}$$

und

$$\cos\varrho_2=\frac{-\frac{xy\sqrt{e^2-d^2}}{a^2}+\frac{dyz+\sqrt{e^2-d^2}\,xy}{a^2-d^2}+\frac{dyz}{e^2-a^2}}{\sqrt{[e^2y^2+d^2z^2+(e^2-d^2)x^2+2dxz\sqrt{e^2-d^2}]\,u^2}}$$

wenn unter u^2 der Ausdruck $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{(a^2-d^2)^2}+\frac{z^2}{(e^2-a^2)^2}$ verstanden wird; hieraus folgt:

$$\frac{1}{f}\cdot\left(\cos^2\varrho_1 - \cos^2\varrho_2\right) = \left[\frac{d^2x^2}{a^4} + \frac{z^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)^2} - \frac{2\,dzx\sqrt{e^2-d^2}}{a^2(e^2-a^2)}\right]\left[e^2y^2 + d^2z^2 + (e^2-d^2)x^2 + 2\,dzx\sqrt{e^2-d^2}\right] - \left[\frac{d^2x^2}{a^4} + \frac{z^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)^2} + \frac{2\,dzx\sqrt{e^2-d^2}}{a^2(e^2-a^2)}\right]\left[e^2y^2 + d^2z^2 + (e^2-d^2)x^2 - 2dzx\sqrt{e^2-d^2}\right], \quad 59)$$

wo f ein der rechten Seite gemeinsamer Faktor ist. Der Ausdruck rechts hat die Form $(p-q)(r+s) - (p+q)(r-s)$ und erhält daher den Wert:

$$2(sp - qr),$$

wo $p = \frac{d^2x^2}{a^4} + \frac{z^2(e^2-d^2)}{(e^2-a^2)^2}$, $q = \frac{2\,dzx\sqrt{e^2-d^2}}{a^2(e^2-a^2)}$,

$r = e^2y^2 + d^2z^2 + (e^2-d^2)x^2$, $s = 2\,dxz\sqrt{e^2-d^2}$

ist; die Gleichung 59) vereinfacht sich daher in:

$$\frac{1}{f'}\left[\cos^2\varrho_1 - \cos^2\varrho_2\right] = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} - \frac{z^2}{e^2-a^2}, \quad 60)$$

wo f′ ein neuer, allen Gliedern der rechten Seite gemeinsamer Faktor ist. Für alle Punkte des Kegels 38) liefert daher 60) infolge des Verschwindens der rechten Seite den Satz:

XIX. Jede Tangentialebene des elliptischen Kegels bildet mit den durch ihre Berührungssehne und die Brennlinien gelegten Ebenen gleiche Winkel — vergl. auch Salmon-Fiedler, Raum pag. 434 —.

Handelt es sich hier nur um die analytische Verifikation eines synthetisch schon anderweitig abgeleiteten Satzes, so ermöglicht uns bei dem folgenden, bei Châsles pag. 23 angegebenen Satze die analytische Form die Feststellung der hier auftretenden Konstanten: es ist dies der Satz, daß, wenn man durch eine Erzeugende des elliptischen Kegels und durch die Brennlinien 2 Ebenen legt, sie mit der Ebene der Brennlinien solche Winkel bilden, daß das Tangentenprodukt der Hälften derselben konstant ist.

Da die Ebenen durch die beliebige Erzeugende x, y, z und die Brennlinien die Gleichungen 58) haben, so gelten für den cos und sin der Winkel, die sie mit der Ebene der Brennlinien $y = 0$ bilden, die Beziehungen:

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{dz \pm \sqrt{e^2 - d^2}x}{\sqrt{p \pm q}}, \quad \sin \alpha_{1,2} = \frac{ey}{\sqrt{p \pm q}},$$

wo $p = e^2y^2 + d^2z^2 + (e^2 - d^2)x^2$, und $q = 2d\sqrt{e^2 - d^2}xz$ gesetzt ist. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\varkappa = \left(\frac{a\sqrt{e^2 - d^2} + d\sqrt{e^2 - a^2}}{e\sqrt{a^2 - d^2}}\right)^2, \qquad 61)$$

[dieser Wert wurde durch geeignete Spezialisierung der unten abzuleitenden Gleichungen erhalten] so gilt, wie im folgenden nachgewiesen werden soll, für den Fall, daß x, y, z auf dem Kegel 38) liegt, die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \varkappa. \qquad 62)$$

Es wird nämlich $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\,\frac{1-\cos\alpha_2}{1-\cos\alpha_1}$

$$= \frac{\sqrt{p+q} - dz - \sqrt{e^2-d^2}x}{\sqrt{p-q} + dz - \sqrt{e^2-d^2}x}. \qquad 63)$$

Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, daß 62), für $\varkappa$ gleich dem durch 61) angegebenen Wert, erfüllt sei, um aus dieser Annahme dann die für $P = x, y, z$ geltende Bedingung herzuleiten. Nach 63) und 62) wird dann:

$$\sqrt{p+q} - dz - \sqrt{e^2-d^2}x = \varkappa\sqrt{p-q} + \varkappa dz - \varkappa\sqrt{e^2-d^2}x$$

zusammengezogen:

$$\sqrt{p+q} - \varkappa\sqrt{p-q} = dz(1+\varkappa) - \sqrt{e^2-d^2}x(1-\varkappa);$$

quadriert:

$$p + q + \varkappa^2(p-q) - 2\varkappa\sqrt{p^2-q^2} = d^2z^2(1+\varkappa)^2 + (e^2-d^2)x^2(1-\varkappa)^2 + 2dz\sqrt{e^2-d^2}xz(1-\varkappa^2)$$

oder zusammengezogen:

$$e^2y^2[1+\varkappa^2] - 2\varkappa[d^2z^2 - (e^2-d^2)x^2] = 2\varkappa\sqrt{p^2-q^2}$$

oder umgeformt:

$$e^2y^2[1+\varkappa]^2 - 2\varkappa[p - 2(e^2-d^2)x^2] = 2\varkappa\sqrt{p^2-q^2}; \qquad 64)$$

berücksichtigt man ferner, daß wegen 61):

$$(1+\varkappa)^2 = \frac{4a^2(e^2-d^2)\varkappa}{e^2(a^2-d^2)}$$

ist, so erhält 64) die Gestalt:

$$\frac{y^2}{a^2-d^2}\left[a^2(e^2-d^2)-d^2(a^2-e^2)\right]-d^2z^2+(e^2\quad d^2)x^2$$
$$=l\sqrt{p^2-q^2},$$

oder quadriert und alles auf eine Seite geschafft:

$$\frac{4a^2(e^2-d^2)(a^2-e^2)d^2y^2}{a^2-d^2}\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}-\frac{z^2}{e^2-a^2}\right\}=0, \quad 65)$$

dies ist also die Bedingung für den Punkt $P = x, y, z$, damit 62) erfüllt ist; folglich liefert 65) den Satz:

Sucht man den Ort aller derjenigen Strahlen eines Strahlbündels, für die die durch sie und zwei feste Strahlen hindurchgelegten Ebenen zwei solche Winkel mit der Ebene der festen Strahlen bilden, daß das Tangentenprodukt dieser halben Winkel konstant ist, so ist der Ort der elliptische Kegel 38); die festen Strahlen sind seine Brennlinien, und das konstante Tangentenprodukt ist $\left(\frac{a\sqrt{e^2-d^2}+d\sqrt{e^2-a^2}}{e\sqrt{a^2-d^2}}\right)^2$.

III. Die Paraboloide.

§ 8. Ableitung der Amiotschen Identität für die Paraboloide.

Die beiden Flächen:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2=0 \quad [b^2>c^2] \qquad 1)$$

und:

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}+2x-b'^2=0 \quad [b'^2>c'^2] \qquad 2)$$

mögen konfokal sein und konfokal liegen; dann wird also:

$$b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2 \qquad 3)$$

Es seien nun $P = x,\ y\ z$ und $P_0 = x_0,\ y_0,\ z_0$ zwei beliebige Raumpunkte, so wird, wie sich durch einfache Umordnung der Klammerausdrücke unter Berücksichtigung des Umstandes, daß h^2 einen der beiden Werte 3) annehmen kann, sofort ergibt:

$$\begin{aligned} h^2 \left\{ \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left(\frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\} \\ = 2h^2(x - x_0) - h^4 + (b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} \right) \qquad 4) \\ + (c^2 - c'^2)\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c'^2} \right). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} \right) = (y - y_0)^2 - \left(\frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0 \right)^2,$$

und analog:

$$(c^2 - c'^2)\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c'^2} \right) = (z - z_0)^2 - \left(\frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0 \right)^2.$$

Auf Grund dieser Formeln geht 4) über in:

$$\begin{aligned} h^2 \left\{ \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left(\frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\} \\ = \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} \qquad 5) \\ \left\{ (x - x_0 - h^2)^2 + \left(\frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0 \right)^2 + \left(\frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0 \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung 5) gilt also identisch in x, y, z und x_0, y_0, z_0. Um nun hieraus die Identitäten, die dem Amiotschen Satze zu Grunde liegen, zu erhalten, ordnet man dem Punkte P_0 einen Punkt $P_1 = x_1, y_1, z_1$ durch folgende Beziehungen zu:

$$x_1 = x_0 + h^2, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y_0}{b'^2}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z_0}{c'^2}. \qquad 6)$$

Man bezeichnet P_1 als den dem Punkte P_0 entsprechenden Punkt.

Durch 6) geht die Identität 5) über in:

$$h^2 \left\{ \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left(\frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\}$$

$$= \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} \qquad 7)$$

$$- \left\{ (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2}(y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2}(z - z_1)^2 \right\}.$$

Man spezialisiert jetzt weiter durch die Annahme, daß P_0 auf einem Hauptschnitt der zweiten Fläche und zwar entweder in der xy- oder in der xz-Ebene liege, so daß also seine Koordinaten entweder der Bedingung:

$$\frac{y_0^2}{b'^2} + 2x_0 - b'^2 = 0, \; z_0 = 0 \qquad 8)$$

oder der Gleichung:

$$\frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 = 0, \; y_0 = 0 \text{ genügen.} \qquad 8')$$

Infolge von 8) oder 8′) wird die Identität 7)

$$h^2\left\{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right\}=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\}$$
$$-\left\{(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\} \qquad 9)$$

oder:

$$h^2\left\{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x-b^2\right\}=\left\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\right\}$$
$$-\left\{(x-x_1)^2+\frac{b'^2}{b^2}(y-y_1)^2+\frac{c'^2}{c^2}(z-z_1)^2\right\}, \qquad 9')$$

wobei nach 6) und 8):

$$x_1=x_0+h^2,\ y_1=\frac{b^2}{b'^2}y_0,\ z_1=0 \qquad 10)$$

oder nach 6) und 8′):

$$x_1=x_0+h^2,\ y_1=0,\ z_1=\frac{c^2}{c'^2}z_0 \text{ ist.} \qquad 10')$$

Eine letzte Spezialisierung liefert uns dann schließlich die allen Paraboloiden gemeinsame Form der Amiotschen Identitäten.

Setzt man nämlich $c'^2=0$ oder $b'^2=0$, so folgt aus 3):

$$h^2=c^2,\ b'^2=b^2-c^2;\ \text{oder:} \qquad 11)$$
$$h^2=b'^2,\ c'^2=c^2-b^2. \qquad 11')$$

Die Gleichungen der Hauptschnitte 8) und 8′), denen P_0 genügen soll, gehen über in:

$$\frac{y_0^2}{b^2-c^2}+2x_0-(b^2-c^2)=0,\ z_0=0 \qquad 12)$$

oder in:

$$\frac{z_0^2}{c^2 - b^2} + 2x_0 = 0,\ y_0 = 0; \qquad 12')$$

d. h. die Hauptschnitte werden linke oder rechte Fokalparabel der Fläche 1).

Um nun 1) auf die allen Paraboloiden gemeinsame Gleichungsform zu bringen, muß man:

$$b^2 = p,\ c^2 = p - e$$

setzen; dann wird auch:

$$h^2 = p - e,\ b'^2 = e \qquad 13)$$

oder:

$$h^2 = p,\ c'^2 = -e. \qquad 13')$$

Es ergibt sich folglich jetzt der Satz:

Ist $P_0 = x_0,\ y_0,\ 0$ oder $P_0 = x_0,\ 0,\ z_0$ ein Punkt I. der linken Fokalparabel:

$$\frac{y^2}{e} + 2x - e = 0,\ z = 0,$$

bezw. der rechten Fokalparabel:

$$z^2 - 2ex = 0,\ y = 0 \text{ der Fläche:}$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2x - p = 0,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt durch die Formeln:

$$x_1 = x_0 + p - e,\ y_1 = \frac{p}{e} y_0,\ z_1 = 0 \qquad 14)$$

oder:

$$x_1 = x_0 + p,\ y_1 = 0,\ z_1 = -\frac{p - e}{e} z_0 \qquad 14')$$

zugeordnet, so bestehen folgende Identitäten in x, y, z:

$$(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$

$$=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\} \qquad 15)$$

$$-\left\{(x-x_1)^2+\frac{e}{p}(y-y_1)^2\right\};$$

oder:

$$p\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$

$$=\left\{(x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2\right\} \qquad 15')$$

$$-\left\{(x-x_1)^2-\frac{e}{p-e}(z-z_1)^2\right\}.$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von 15) oder 15') bedeutet den Abstand des Punktes P von einem beliebigen Punkte P_0 der linken oder rechten Fokalparabel; hat nun der zweite Klammerausdruck die Form:

$$(x-x_1)^2-m^2(y-y_1)^2 \text{ oder}$$
$$(x-x_1)^2-n^2(z-z_1)^2,$$

so ist er nach § 2, 11) oder 11'), abgesehen von einem konstanten Faktor und einem Vorzeichen, das Produkt der relativen Abstände des Punktes P von zwei festen Ebenen; in diesem Fall sagen also die Identitäten 15) und 15') die Amiotsche Eigenschaft der durch

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p=0$$

gegebenen Paraboloide zweiter Ordnung aus. Ist der zweite Klammerausdruck auf der rechten Seite von 15) und 15') dagegen die Summe zweier Quadrate, so bedeutet er nach Staude, Geometrie pag. 690 ff., das schräge Abstandsquadrat des Punktes P von einer festen Geraden; in diesem Fall ergibt sich aus den Identitäten, wenn wir von der imaginären Amiotschen Erzeugungsweise absehen, die Mac Cullaghsche Fokaleigenschaft des durch $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0$ gegebenen Paraboloides.

Welche von beiden Erzeugungsweisen anwendbar ist, hängt von der Größenbeziehung zwischen p und e ab, und ist daher für die einzelnen Paraboloide verschieden; wir sehen aber auch hier von einer ausführlicheren Erörterung der Mac Cullaghschen Erzeugungsart ab, und beschränken uns im folgenden darauf, durch Spezialisierung der Identitäten 15) oder 15') die Amiotsche Eigenschaft für die einzelnen Paraboloide näher zu untersuchen.

§ 9. Das linke elliptische Paraboloid.

Setzt man voraus, daß $\infty > p > e > 0$ ist, so geht 15') über in:

$$p\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = r^2 - \frac{\varepsilon p}{p-e} r_1 r_2, \quad 16)$$

wo r die Entfernung des Punktes $P = x, y, z$ von einem beliebigen Punkte der rechten Fokalparabel bedeutet, während r_1 und r_2 nach § 2, 11') die relativen

senkrechten Abstände des Punktes P von dem Ebenenpaar:

$$(E_{1,2})\,(x - x_1)^2 - \frac{e}{p-e}(z - z_1)^2 = 0$$

sind. Diese Ebenen sind die durch die in P_1 errichtete Direktrix gehenden Kreisschnittebenen.

Das in 16) auftretende Vorzeichen ε ist nach § 2, 10′)

$$= \text{sign}\left(x_1^2 - \frac{e}{p-e} z_1^2\right). \qquad 17)$$

Unter der Annahme, daß P auf dem linken elliptischen Paraboloid:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0 \qquad 18)$$

liege, liefert 16) den Satz:

I. Für jeden Punkt des linken elliptischen Paraboloids 18) ist der absolute Wert des Verhältnisses des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der rechten Fokalparabel zu dem Produkt der relativ genommenen senkrechten Abstände von den beiden durch die dem Punkte der Fokalparabel zugeordnete Direktrix gehenden Kreisschnittebenen konstant, gleich $p : p - e$.

Welches ist nun der Wert des in 16) auftretenden Vorzeichens ε?

Es ist nach 17) $\varepsilon = \text{sign}\left(x_1^2 - \frac{e}{p-e} z_1^2\right)$, d. h. ε ist auch hier — vergl. § 4 — unabhängig von den Punkten des Paraboloids. Um nun ε in betreff seiner Abhängigkeit von x_1, z_1 zu untersuchen, muß man die Gleichung des zu den Punkten P_0 der Fokalparabel

gehörigen Direktrizenzylinders aufstellen; sie lautet nach 14'):

$$\frac{e z_1^2}{(p-e)^2} - 2(x_1 - p) = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung wird

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\left[x_1^2 - 2(x_1 - p)(p-e)\right]$$

$$= \operatorname{sign}\left\{\left[x_1 - (p-e)\right]^2 + p^2 - e^2\right\};$$

da $p > e$ ist, so wird $\varepsilon = +1$. Die Identität 16) geht daher in $p\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p\right\} = r^2 - \frac{p}{p-e} r_1 r_2$ über, und Satz I vereinfacht sich in:

II. Für jeden Punkt des linken elliptischen Paraboloids 18) ist das Verhältnis des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der rechten Fokalparabel zu dem Produkt der relativen senkrechten Abstände von den beiden durch die entsprechende Direktrix gehenden Kreisschnittebenen konstant, gleich $p : (p - e)$.

Es behält hier also das Amiotsche Theorem auch für relative Abstände seine uneingeschränkte Gültigkeit.

Welche Lage haben nun die durch die verschiedenen Direktrizen gehenden Kreisschnittebenen zum Paraboloid?

Das Ebenenpaar $E_{1,2}$ kann die Fläche nie reell schneiden, wie aus Staude, Geometrie § 114, Tab. (20) in folgender Weise hervorgeht:

Für die Paraboloide mit der Gleichung 18), wo die Festsetzung über die Größenbeziehung zwischen p und e vorbehalten bleibt, gibt die Berechnung der geränderten Determinanten:

$$A^u = \frac{p(u^2+v^2)+(p-e)w^2+2us}{p(p-e)}, \quad A^u_{44} = -\frac{u^2}{p(p-e)},$$

$$A'^u_{44} = -\frac{pv^2+(p-e)w^2}{p(p-e)} - \frac{u^2}{p} - \frac{u^2}{p-e}.$$

Für das linke elliptische Paraboloid ist nun $p > e > 0$; d. h. es wird $-A^u_{44} > 0$; ferner ist $-A'^u_{44} > 0$ als Summe von nur positiven Gliedern; es ist daher

$$\operatorname{sign} A'^u_{44} A^u = -\operatorname{sign} A^u$$
$$= -\operatorname{sign}[(u^2+v^2)p + w^2(p-e) + 2us].$$

Nun hat das Ebenenpaar $E_{1,2}$ die Gleichung

$$x - x_1 \pm \sqrt{\frac{e}{p-e}}(z-z_1) = 0,$$

oder, wenn man auf Grund von 14') x_0, z_0 einführt:

$$x - x_0 - p \pm \sqrt{\frac{e}{p-e}}\left(z + \frac{p-e}{e} z_0\right) = 0.$$

Das fragliche Vorzeichen wird daher

$$= -\operatorname{sign}\left[-p+e-2x_0 \pm 2\sqrt{\frac{p-e}{e}} z_0\right]$$

$$= -\operatorname{sign}\left[e-p-\frac{z_0^2}{e} \pm 2\sqrt{\frac{p-e}{e}} z_0\right],$$

da x_0, z_0 auf der rechten Fokalparabel liegt.

Dieser Ausdruck liefert weiter zusammengefaßt:

$$\operatorname{sign}\left[p - e \pm 2\sqrt{\frac{p-e}{e}}\, z_0 + \frac{z_0^2}{e}\right]$$

$$= \operatorname{sign}\left[1 \sqrt{p-e} \pm \frac{z_0}{\sqrt{e}}\right]^2 > 0.$$

Das feste Ebenenpaar schneidet also das linke elliptische Paraboloid stets in einer imaginären Ellipse.

Diese imaginäre Ellipse ist nun im besondern wieder ein imaginärer Kreis; denn es verschwindet auch hier die Diskriminante der quadratischen Gleichung $H(\lambda)$ — vergl. § 4 —.

Um nun den Verlauf der Kreisschnittebenen im einzelnen festzustellen, betrachten wir die zu den verschiedenen Punkten der Fokalparabel gehörigen Ebenenpaare:

1. Zu dem Scheitel der Fokalparabel f:

$$x_0 = 0,\ z_0 = 0$$

gehört wegen 14') die Direktrix durch den Punkt:

$$x_1 = p,\ z_1 = 0.$$

Das zugehörige Kreisschnittebenenpaar hat die Gleichung

$$(E_{1,2})\ x - p \pm \sqrt{\frac{e}{p-e}}\, z = 0 \quad \text{— vergl. Fig. 8 —.}$$

2. Bewegt sich P_0 jetzt auf dem oberhalb der x-Achse liegenden Bogen der Fokalparabel vorwärts, so läuft P_1 auf dem unterhalb der x-Achse liegenden Teil der Synfokale, da nach 14') z_1 für $p > e$ das

entgegengesetzte Vorzeichen wie z_0 hat. Bei dieser Bewegung nähert sich E_1 der Fläche, während sich E_2 von ihr entfernt.

3. Betrachten wir jetzt den oberen Schnittpunkt der Fokalparabel mit dem Paraboloid, d. h. den Kreispunkt mit den Koordinaten:

$$x_0 = \frac{p-e}{2},\ y_0 = 0,\ z_0 = +i\,e(p-e),$$

so hat die zugehörige Direktrix die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{3p-e}{2},\quad z_1 = -(p-e)\sqrt{\frac{p-e}{e}}.$$

Das durch diese Direktrix gehende Kreisschnittebenenpaar wird also:

$$(E_{1,2}) \qquad x - \frac{3p-e}{2} \pm i\sqrt{\frac{e}{p-e}}\left(z + (p-e)\sqrt{\frac{p-e}{e}}\right) = 0. \tag{19}$$

Nach Satz III in § 4 muß nun E_1 durch den obigen Kreispunkt gehen, und in der Tat erfüllen die Koordinaten desselben 19).

4. Weiter kann sich E_1 aber dem Paraboloid nicht nähern, da sie sonst dasselbe schneiden würde, was nach unseren obigen Betrachtungen unmöglich ist; konstruiert man nun zu einem Punkte der Fokalparabel, für den $x_0 > \frac{p-e}{2}$ ist, das zugehörige Ebenenpaar, so sieht man, daß E_1 jetzt wieder zurückweicht.

Der Verlauf der Kreisschnittebenen, die zur Amiotschen Erzeugung des Paraboloids dienen, für die Direktrizen, deren Fußpunkte auf dem obern Bogen der Synfokale liegen, ergibt sich wegen der Symmetrieverhältnisse dadurch, daß man die soeben gefundenen Fokalpunkte und Direktrizen an der xy-Ebene spiegelt und dann durch die Leitlinien wieder die beiden Systeme paralleler Ebenen legt. Man findet dann z. B., daß von 1′ — vergl. Fig. 8 — bis zu einer Direktrix 5 sich die Ebene E_2 der Fläche nähert, daß E_2 durch diese Direktrix das Paraboloid im Kreispunkt $x_0 = \frac{p-e}{2}$, $z_0 = -\frac{1}{2} e(p-e)$ berührt und sich dann wieder von der Fläche entfernt.

§ 10. Das hyperbolische Paraboloid.

Mit der Voraussetzung

$$e > p > 0 \qquad 23)$$

folgt, daß in dem zweiten Klammerausdruck auf der rechten Seite der beiden Identitäten 15) und 15′) eine Summe von Quadraten und keine Differenz auftritt; das hyperbolische Paraboloid kann also nicht reell auf Amiots Weise sondern nur auf Mac Cullaghsche Art erzeugt werden.

§ 11. Das rechte elliptische Paraboloid.

Unter der Voraussetzung:

$$e > 0,\ 0 > p > -\infty \qquad 24)$$

geht 15) über in:

$$(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$

$$=\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\} \qquad 25)$$

$$-\left\{(x-x_1)^2-\frac{e}{|p|}(y-y_1)^2\right\},$$

wo $|p|$ der absolute Betrag der jetzt stets negativen Größe p ist. Aus 25) folgt dann weiter nach § 2, 11):

$$(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$

$$=r^2-\varepsilon\left(1+\frac{e}{|p|}\right)r_1 r_2, \qquad 26)$$

wo r die Entfernung des Punktes $P=x, y, z$ von einem Punkte P_0 der linken Fokalparabel des Paraboloids bedeutet, und r_1 und r_2 die relativen senkrechten Abstände von dem durch den entsprechenden Punkt P_1 gehenden Kreisschnittebenenpaar

$$(E_{1,2}): \sqrt{|p|}\,(x-x_1) \pm \sqrt{e}\,(y-y_1)=0 \qquad 27)$$

sind. Das in 26) auftretende Vorzeichen ε ist nach § 2, 10):

$$\text{sign}\left(x_1^2-\frac{e}{|p|}y_1^2\right),$$

also auch hier wieder unabhängig von den Punkten des Paraboloids; um nun ε in seiner Abhängigkeit von x_1, y_1 zu untersuchen, muß man die Gleichung

des zu den Punkten P_0 der Fokalparabel gehörigen Direktrizenzylinders aufstellen, sie lautet:

$$e y_1^2 + 2 p x_1 + e p^2 - 2 p^3 = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung wird

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{sign } [x_1^2 - 2 p x_1 - p e + 2 p^2] \\ &= \text{sign } [(x_1 - p)^2 + p^2 - p e], \end{aligned}$$

da nun $e > 0$ und $p < 0$ ist, so wird $\varepsilon = +1$.

Die Identität 26) vereinfacht sich also in:

$$(p - e)\left\{\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2 x - p\right\} = r^2 - \frac{|p| + e}{|p|} r, r_2,$$

und liefert den Satz:

Für jeden Punkt des rechten elliptischen Paraboloids 18) ist das Verhältnis des Quadrates seiner Entfernung von einem Punkte der linken Fokalparabel zu dem Produkt der relativen senkrechten Abstände von den beiden zugehörigen Kreisschnittebenen konstant, gleich $\frac{|p| + e}{|p|}$. I.

Es behält also beim rechten elliptischen Paraboloid das Amiotsche Theorem auch für relative Abstände seine uneingeschränkte Gültigkeit.

Welche Lage haben nun die durch die verschiedenen Direktrizen gehenden Kreisschnittebenen zur Fläche?

$E_{1,2}$ können das Paraboloid nie reell schneiden; denn nach § 9, 18') wird infolge der Voraussetzung 24) für das rechte Paraboloid:

$$-A^u_{44} > 0 \text{ und } A'^u_{44} > 0.$$

Daher folgt sign $A'^u_{44}\ A^u$ = sign A^u · sign $[p(u^2+v^2) + (p-e)w^2 + 2us]$. Für $E_{1,2}$ wird sign A^u = sign $\left[e - p + 2x_0 \pm 2\sqrt{\frac{p}{e}}\, y_0\right]$, da P_0 auf der linken Fokalparabel liegt, so wird

$$\text{sign } A^u = \text{sign}\left[\frac{y_0^2}{e} + |p| \pm 2\sqrt{\frac{p}{e}}\, y_0\right]$$

$$= \text{sign}\left[\frac{y_0}{\sqrt{e}} \pm \sqrt{|p|}\right]^2 > 0.$$

Nach Staude, Geometrie § 114, Tab. (20) schneidet also das Ebenenpaar 27) das Paraboloid stets in einer imaginären Ellipse, die auch hier wieder im besondern ein imaginärer Kreis aus demselben Grunde wie bei den übrigen bisher behandelten Flächen ist; es wird nämlich die fragliche Diskriminante:

$$(A'^u_{44})^2 + 4(u^2+v^2+w^2)A^u_{44} = \frac{4}{p^2} - 4\left(1 + \frac{e}{|p|}\right)\frac{1}{p(p-e)} = 0.$$

In bezug auf die Lage der verschiedenen zur Amiotschen Erzeugung dienenden Kreisschnittebenen zur Fläche ergibt sich folgendes.

1. Zu dem Scheitel der Fokalparabel f: $x_0 = \frac{e}{2}$, $y_0 = 0$ gehört wegen 14) die Direktrix durch den

Punkt $x_1 \quad p - \frac{e}{2}$, $y_1 \quad 0$. Das zugehörige Kreisschnittebenenpaar hat nach 27) die Gleichungen:

$$(E_{1,2})\ x - p + \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e}{|p|}}\, y = 0 \quad \text{— vergl. Fig. 9 —.}$$

2. Bewegt sich P_0 jetzt auf dem oberhalb der x-Achse liegenden Bogen der Fokalparabel vorwärts, so läuft P_1 auf dem unterhalb der x-Achse liegenden Teil der Schnittkurve des Direktrizenzylinders mit der xy-Ebene — nach 14) —. Bei dieser Bewegung der Direktrizen nähert sich von dem Kreisschnittebenenpaar E_2 der Fläche, während sich E_1 von ihr entfernt.

3. Für den obern Schnittpunkt der Fokalparabel mit dem Paraboloid, d. h. den Kreispunkt mit den Koordinaten $x_0 = \frac{p+e}{2}$, $y_0 = \sqrt{e|p|}$, $z_0 = 0$, 28) hat die zugehörige Direktrix die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{3p-e}{2}, \quad y_1 = \frac{p}{e}\sqrt{e|p|}.$$

Nach Satz III in § 4 muß nun E_1 oder E_2 durch diesen Kreispunkt gehen, und in der Tat erfüllen die Werte 28) die Gleichung der Ebene E_2:

$$\frac{p+e}{2} - \frac{3p-e}{2} - \sqrt{\frac{e}{|p|}}\left[\sqrt{e|p|} - \frac{p}{e}\sqrt{e|p|}\right] = 0.$$

4. Weiter kann sich aber nach den obigen Bemerkungen E_2 dem Paraboloid nicht nähern; konstruiert man also zu einem Punkte der Fokalparabel, für den $x_0 < \frac{p+e}{2}$ ist, das zugehörige Ebenenpaar, so weicht E_2 wieder von dem Paraboloid zurück.

Der Verlauf der Kreisschnittebenen durch die Direktrizen, deren Fußpunkte im zweiten Quadranten der xy-Ebene liegen, ergibt sich auf analoge Weise wie beim linken elliptischen Paraboloid in § 9. Man findet z. B., daß von 1′ bis zu einer Direktrix 4′ die Ebene E_1 sich der Fläche nähert, daß E_1 durch diese Direktrix das Paraboloid im Kreispunkt $x_0 \quad \frac{p+e}{2}$, $y_0 = -1\, e_1 p$, $z_0 \quad 0$ berührt, sich dann wieder von der Fläche entfernt usw.

Bei einem kurzen Rückblick auf das Verhalten des Vorzeichens des Verhältnisses vom Entfernungsquadrat zum Abstandsprodukt beim Amiotschen Theorem, wenn man anstatt der absoluten die relativen Abstände betrachtet, sehen wir also, daß sich für das zweischalige Hyperboloid das Theorem dahin abändert, daß nicht das Verhältnis des Quadrates der Entfernung eines Flächenpunktes von einem Punkte der Fokalkurve zu dem Produkt der relativen senkrechten Abstände von den zugehörigen Kreisschnittebenen selber, sondern nur der absolute Wert dieses Verhältnisses konstant bleibt; für alle übrigen Flächen zweiter Ordnung dagegen, die sich auf die Amiotsche Weise erzeugen lassen, bleibt auch für relative Abstände das Verhältnis selber konstant.

Was nun den Wert dieses konstanten Verhältnisses angeht, so ist er für alle Flächen $= u^2 + v^2 + w^2$, d. h. gleich dem Koeffizienten e^2, der in der quadratischen Gleichung des Hauptachsenproblems der Schnittkurven

der Flächen mit den zur Amiotschen Erzeugung dienenden Kreisschnittebenen auftritt — vergl. Staude, Geometrie pag. 589 ff. —. Ferner ist zu beachten, daß dieses Verhältnis — oder beim zweischaligen Hyperboloid sein absoluter Wert — für die Amiotsche Erzeugungsart bei allen Flächen > 1 ist, mit Ausnahme des Ellipsoids, wo es $\gtrless 1$ ist; dagegen ist der Cullaghsche Modul stets < 1.

In betreff der zur Amiotschen Erzeugung dienenden Ebenen ist hervorzuheben, daß wir es in allen Fällen mit imaginären Kreisschnittebenen zu tun haben, die im Grenzfall die Fläche in den Kreispunkten berühren; hieraus erklärt sich auch, daß einschaliges Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid nicht auf Amiots Weise erzeugt werden können, denn diese beiden Flächen besitzen in den zur Amiotschen Konstruktion dienenden beiden Systemen von parallelen Kreisschnittebenen nur reelle, keine imaginären Kreisschnittebenen.

Zum Schlusse möge es mir an dieser Stelle verstattet sein, Herrn Professor Staude für das meiner vorliegenden Dissertation erwiesene wohlwollende Interesse meinen ehrfurchtsvollsten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Am 30. Juni 1888 wurde ich, Gustav Heinrich Joachim Bernhard Blenck, zu Kothendorf als Sohn des Lehrers Heinrich Blenck geboren. Meinen ersten Unterricht erhielt ich in der Schule meines Geburtsortes. Von Ostern 1898 bis Ostern 1907 besuchte ich das Realgymnasium zu Schwerin und legte hier die Reifeprüfung ab. Darauf studierte ich Mathematik und zwar bis Michaelis 1908 in München und darauf vier Semester in Rostock, wo ich im November 1910 die Oberlehrerprüfung bestand.

Fig.1

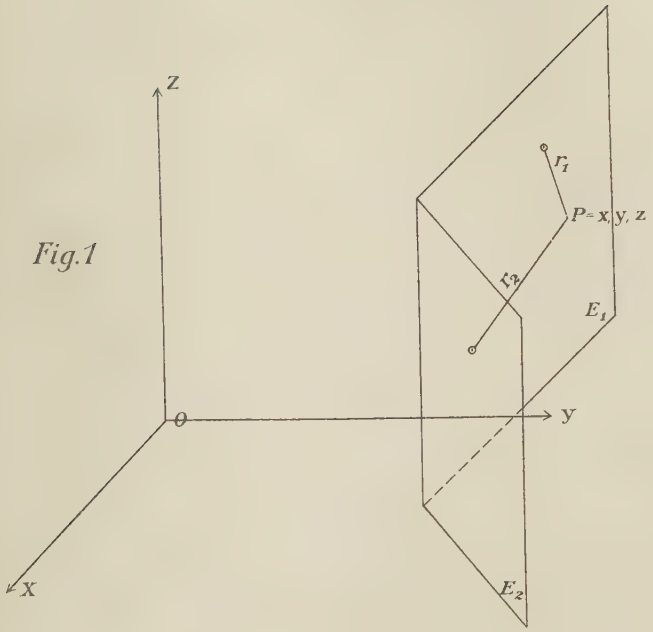
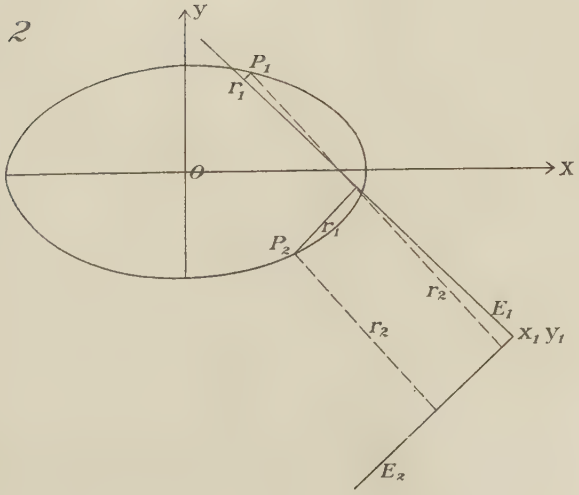
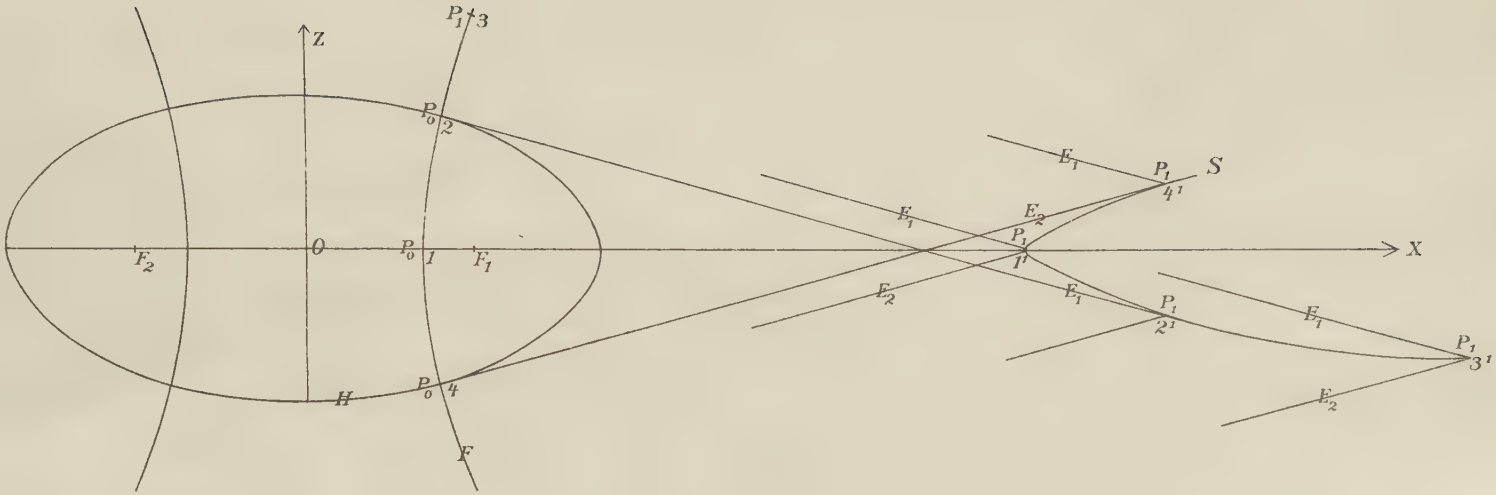


Fig. 2



ig. 3


Z
P_1 3
P_0 2
F_2
0
P_0 1
F_1
H
P_0 4
F
E_1
P_1
S
4^1
E_1
E_2
P_1
X
E_2
1^1
E_1
P_1
2^1
E_1
P_1
3^1
E_2

Tafel II.

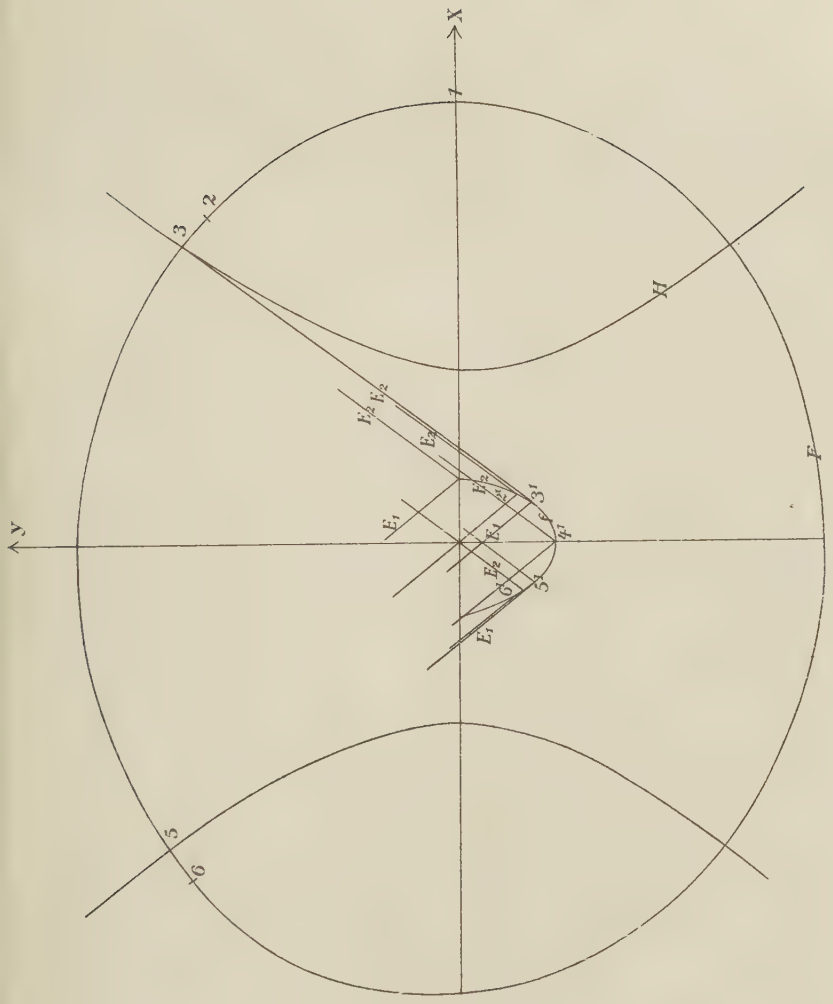


Fig. 4

Fig. 5

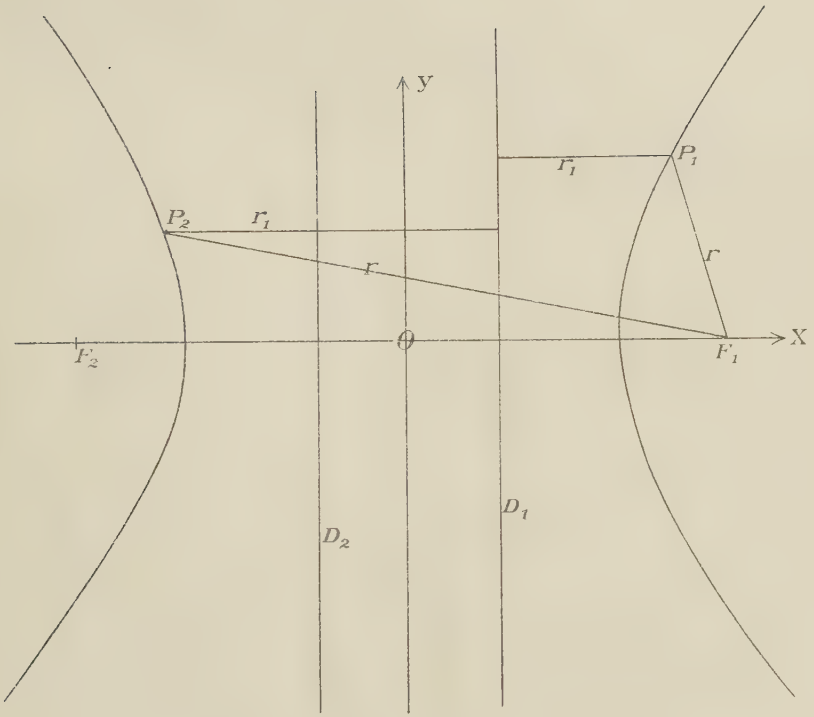


Fig. 6

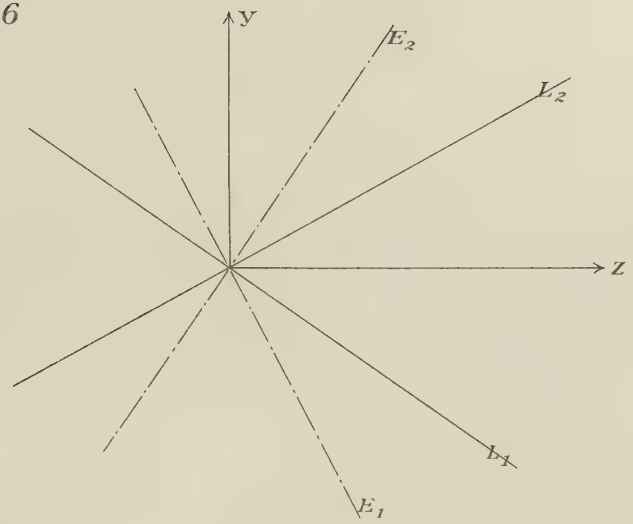


Fig. 7

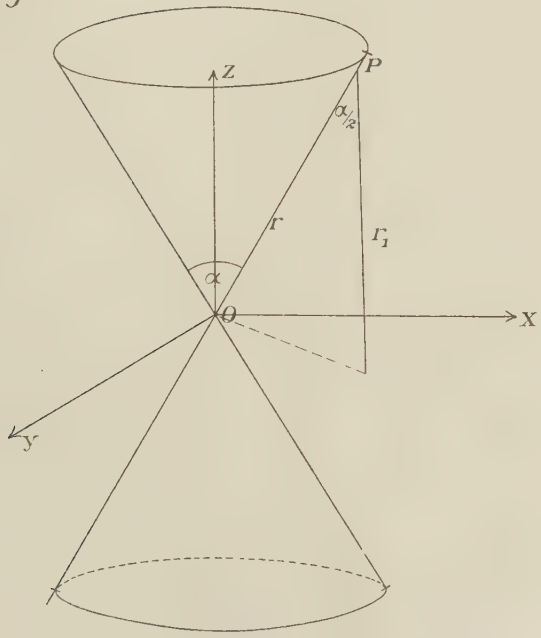
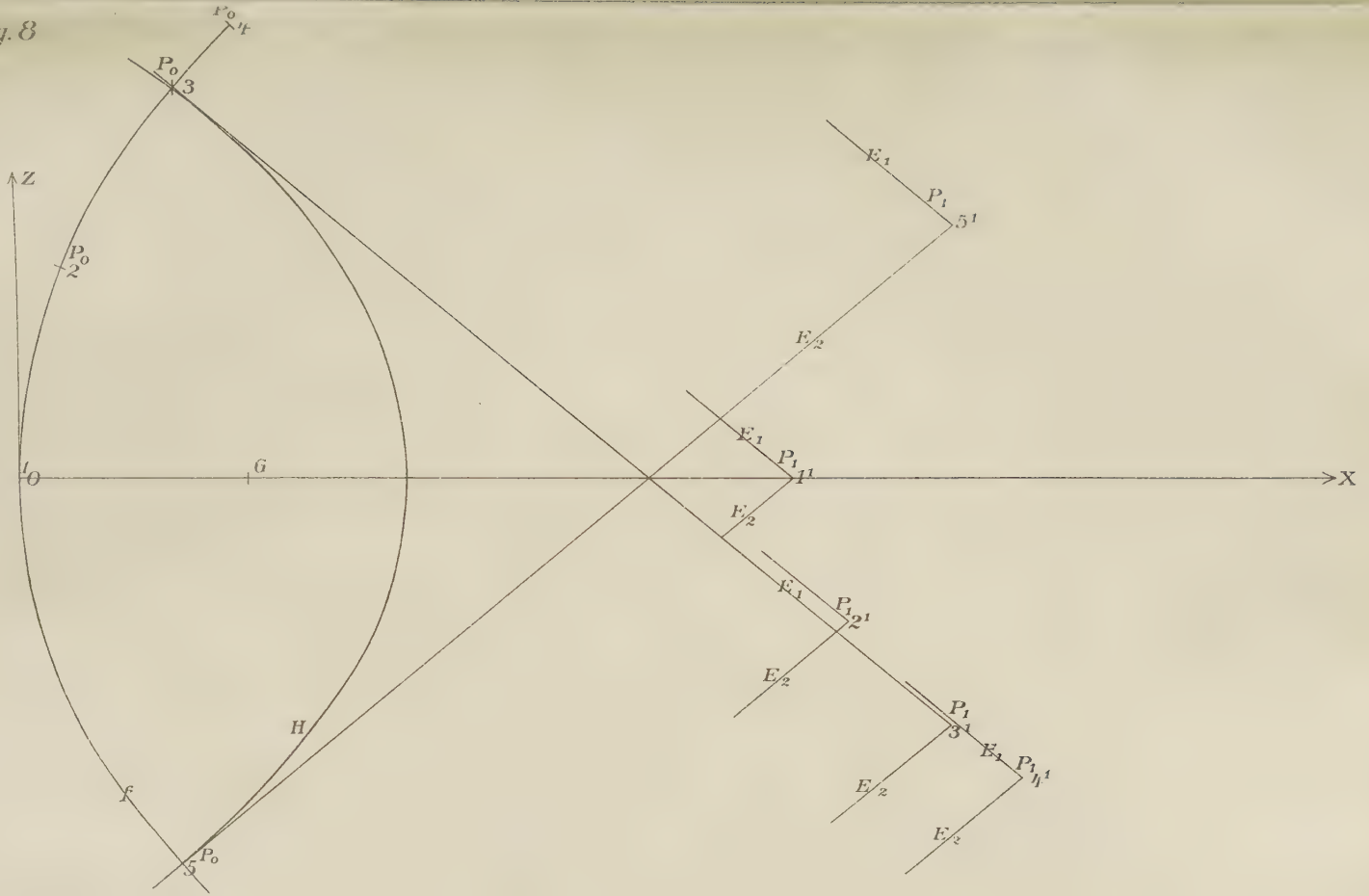


Fig. 8



Tafel VI.

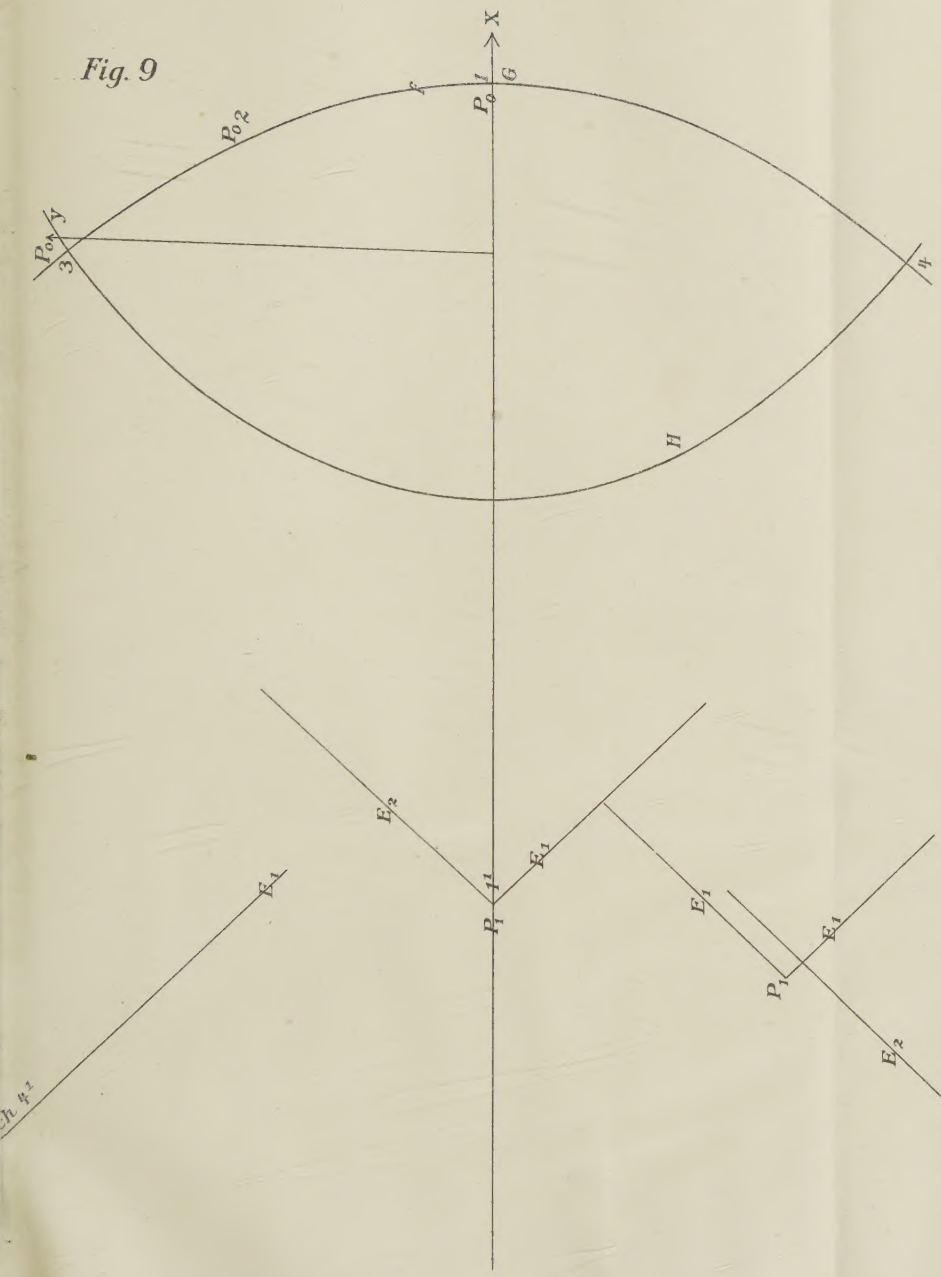



Fig. 9